3 ВЕКТОРЫ

3.1 Основные понятия

Величины, которые определяются заданием некоторого числа, называются с к а л я р н ы м и (длина, температура, масса).

Величины, которые определяются заданием не только числа, но и некоторого направления, называются в е к т о р н ы м и (сила, скорость, ускорение).

Векторные величины геометрически изображаются с помощью векторов.

В е к т о р – это направленный отрезок.

Если точка А – начало вектора, а точка В – его конец, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$. Вектор можно обозначать одной строчной буквой латинского алфавита $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$

Вектор $\overrightarrow{BA}$ называется п р о т и в о п о л о ж н ы м вектору $\overrightarrow{AB}$.

Д л и н о й или м о д у л е м вектора называется расстояние между его началом и концом и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\vec{a}|$.

Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется н у л е в ы м и обозначается $\vec{0}$, и его длина равна нулю, то есть $|\vec{0}| = 0$.

Вектор, длина которого равна единице, называется е д и н и ч н ы м вектором и обозначается $\vec{e}$.

Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением $\vec{a}$, называется о р т о м вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^0$.

Векторы называются к о л л и н е а р н ы м и, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются равными, если они:

1) имеют одинаковые длины;
2) коллинеарны;
3) одинаково направлены.

В этом случае пишут $\vec{a} = \vec{b}$.

Векторы называются к о м п л а н а р н ы м и, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Если векторы взаимно перпендикулярны, то они называются о р т о г о н а л ь н ы м и.

3.2 Линейные операции над векторами

К линейным операциям над векторами относятся сложение и вычитание векторов, а также умножение вектора на число.

1. Сложение векторов

а) правило параллелограмма (рис.1).

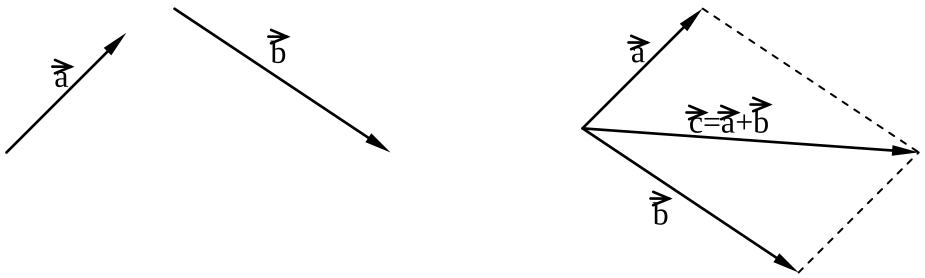


Рисунок 1

б) правило треугольника (рис.2).

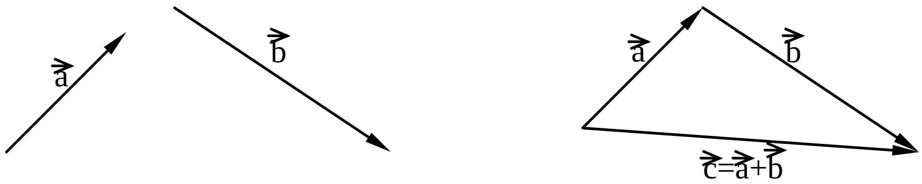


Рисунок 2

в) правило многоугольника (рис.3).

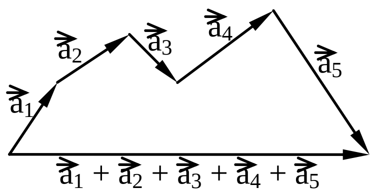


Рисунок 3

2. Вычитание векторов (рис.4).

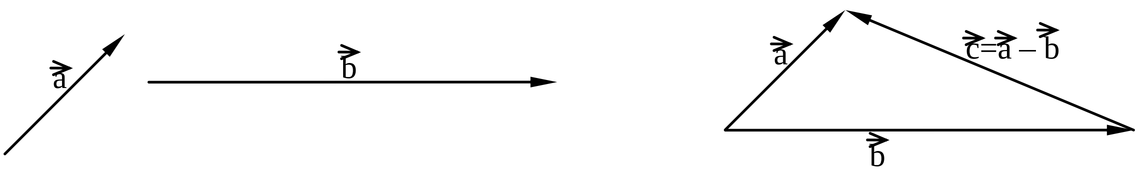


Рисунок 4

3. Умножение вектора на число

Произведением вектора $\vec{a}$ на число $\lambda \neq 0$ называется вектор $\vec{c}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину $|\vec{c}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$, а направление вектора $\vec{c}$ совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно ему, если $\lambda < 0$.

Приведем некоторые свойства линейных операций над векторами:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$,

2) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$,

3) $\lambda_1\cdot(\lambda_2\cdot\vec{a})=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\vec{a}$,

4) $(\lambda_1+\lambda_2)\cdot\vec{a}=\lambda_1\cdot\vec{a}+\lambda_2\cdot\vec{a}$,

5) $\lambda\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\cdot\vec{a}+\lambda\cdot\vec{b}$.

3.3 Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве заданы ось l и некоторый вектор $\overrightarrow{AB}$. Обозначим через A_1 и B_1 проекции на ось l соответственно начала A и конца B этого вектора (рис.5).

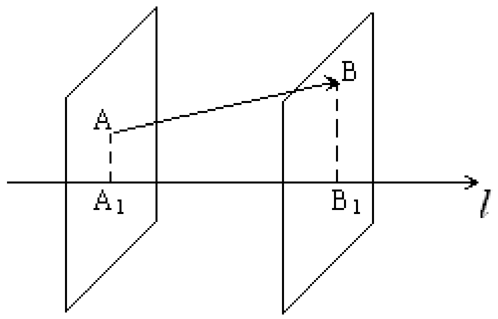


Рисунок 5

П р о е к ц и е й вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется величина A_1B_1 направленного отрезка $\overrightarrow{A_1B_1}$ и обозначается $пр_l\overrightarrow{AB}=A_1B_1$.

Некоторые основные свойства проекций

1) Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна

$$пр_l\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\varphi,\ \text{где}\ \varphi=\left(\vec{a}\,\hat{,}\,l\right).$$

а) если угол $\varphi-$ острый (рис.6), то есть $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, то

$$пр_l\vec{a}=\left|\overrightarrow{M'N'}\right|>0.$$

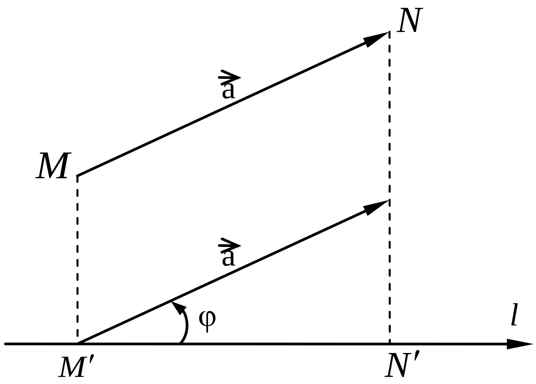


Рисунок 6

б) если угол φ – тупой, то есть $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ (рис.7), то $np_l\vec{a} = -\left|\overrightarrow{M'N'}\right| < 0$

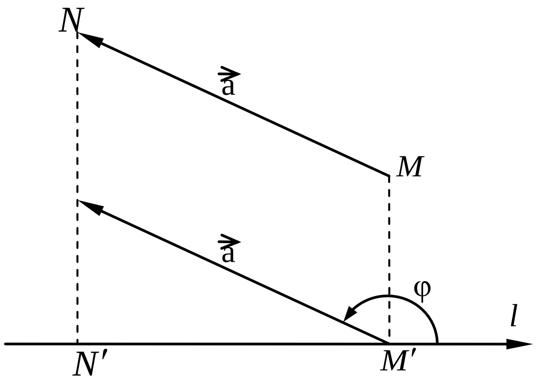


Рисунок 7

в) если угол φ – прямой, то есть $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (рис.8), то $np_l\vec{a} = 0$

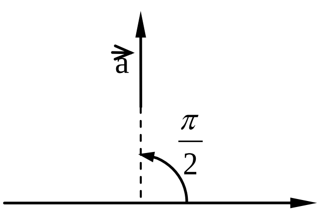


Рисунок 8

2) Проекция суммы двух векторов на ось равна сумме проекций слагаемых на ту же ось, то есть

$$np_l\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = np_l\vec{a} + np_l\vec{b}\,.$$

3) Если вектор $\vec{a}$ умножить на число λ, то его проекция на ось также умножится на это число, то есть

$$np_l\left(\lambda\,\vec{a}\right) = \lambda \cdot np_l\vec{a}\,.$$

3.4 Линейная зависимость векторов

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются линейно зависимыми, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, не все равные нулю, для которых имеет место равенство

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_n \vec{a}_n = 0.$$

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называются линейно независимыми, если равенство

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + ... + \lambda_n \vec{a}_n = 0$$

имеет место только при $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Теорема 1. Всякие три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ на плоскости линейно зависимы.

Теорема 2. Для того, чтобы два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были неколлинеарны.

Теорема 3. Всякие четыре вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ в пространстве линейно зависимы.

Теорема 4. Для того, чтобы три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были некомпланарны.

3.5 Базис на плоскости и в пространстве

Базисом на плоскости называются два линейно независимых вектора этой плоскости, взятых в определенном порядке.

Теорема. Если векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ образуют базис на плоскости, то всякий вектор $\vec{a}$ этой плоскости может быть единственным образом разложен в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2.$$

Числа λ_1 и λ_2 называют аффинными координатами вектора $\vec{a}$ на плоскости и пишут $\vec{a} = \{\lambda_1; \lambda_2\}$.

Базисом в пространстве называются три любых линейно независимых вектора.

Теорема. Если в пространстве выбран некоторый базис $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, то любой вектор $\vec{a}$ этого пространства может быть единственным образом разложен по этому базису в виде

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3,$$

где λ_1, λ_2, λ_3 – аффинные координаты вектора $\vec{a}$ в пространстве.

Пишут $\vec{a} = \{\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3\}$.

3.6 Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$.

Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы (орты) осей координат, то есть

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

и одинаково направлены соответственно с осями OX, OY и OZ.

Так как орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ не компланарны, то они образуют базис, который называется декартовым ортогональным базисом.

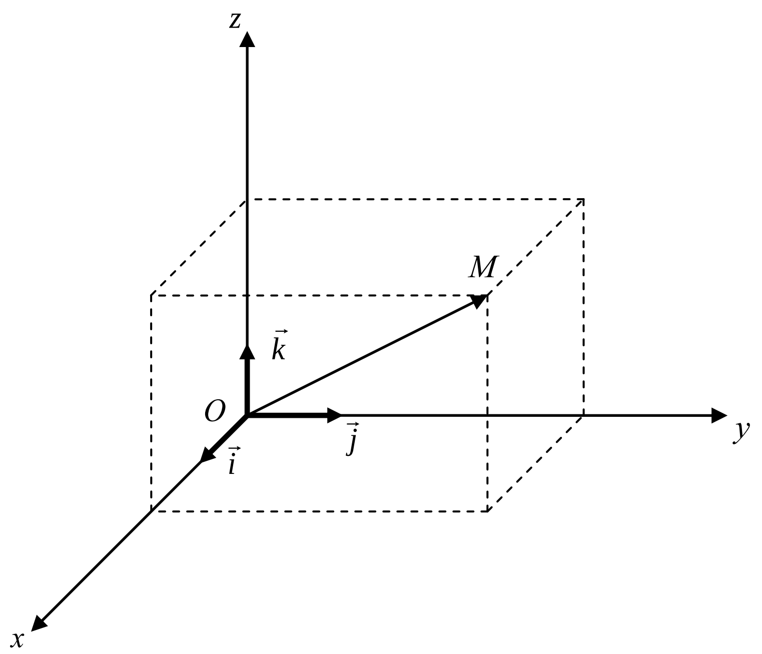


Рисунок 9

Возьмем любой вектор $\vec{a}$ пространства и совместим его начало с началом координат: $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ (рис.9).

Можно показать, что вектор $\vec{a}$ можно представить в виде

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

где $x = np_{OX}\vec{a}$, $y = np_{OY}\vec{a}$, $z = np_{OZ}\vec{a}$ и вектор $\vec{a}$ записывают в виде $\vec{a} = \{x; y; z\}$. Числа x, y, z называют прямоугольными декартовыми координатами.

Зная координаты вектора $\vec{a} = \{x, y, z\}$, можно найти его длину по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Пусть вектор $\vec{a} = \{x, y, z\}$ образует с осями координат OX, OY и OZ соответственно углы α, β, γ, тогда

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}, \ \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}, \ \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}$$

называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$.

Можно показать, что сумма квадратов направляющих косинусов ненулевого вектора равна единице, то есть

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Заметим, что орт вектора $\vec{a} = \{x, y, z\}$ находится по формуле $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, то есть

$$\vec{a}^0 = \{\cos\alpha, cos\,\beta, cos\,\gamma\}.$$

3.7 Действия над векторами, заданными координатами

Пусть даны векторы $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$, тогда

1) $\vec{a} \pm \vec{b} = \{x_1 \pm x_2\,;\, y_1 \pm y_2\,; z_1 \pm z_2\}$,

2) $\lambda\vec{a} = \{\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1\}$, ($\lambda = const$),

3) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$ – условие равенства векторов,

4) $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ – условие коллинеарности векторов.

Если известны координаты точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ равны разностям соответствующих координат его конца и начала, т.е.

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}.$$

Пример 3.1. Даны точки

$$A(1,-3,5),\ B(0,2,1) \text{ и } C(-3,4,-2).$$

Найти:

а) $\left|2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}\right|$;

б) $\overrightarrow{AB}^0$.

Решение.

а) Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \{-1;5;-4\},\quad \overrightarrow{BC} = \{-3;2;-3\},$$

отсюда

$$2\cdot\overrightarrow{AB} = \{-2;10;-8\},\quad 3\cdot\overrightarrow{BC} = \{-9;6;-9\}.$$

Получаем

$$2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} = \{-2;10;-8\} - \{-9;6;-9\} = \{7;4;1\},$$

тогда

$$\left|2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{7^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{49 + 16 + 1} = \sqrt{66}.$$

б) Найдем орт вектора

$$\overrightarrow{AB}^0 = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|},$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1+25+16} = \sqrt{42},$$

получаем

$$\overrightarrow{AB}^0 = \left\{-\frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}, -\frac{4}{\sqrt{42}}\right\}.$$

3.8 Скалярное произведение векторов

С к а л я р н ы м п р о и з в е д е н и е м двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi, \text{ где } \varphi = (\vec{a}\wedge\vec{b}).$$

Если даны векторы $\vec{a} = \{x_1;\, y_1;\, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$, то их скалярное произведение вычисляется по формуле

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2.$$

С в о й с т в а и н е к о т о р ы е п р и л о ж е н и я с к а л я р н о г о п р о и з в е д е н и я

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$;

3) $(\lambda\,\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$, $(\lambda = const)$;

4) $\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$;

5) $\sqrt{\vec{a}^2} = |\vec{a}|$;

6) $\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1$, $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$, где $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ – орты осей координат;

7) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, если $\vec{a}\perp\vec{b}$ или $\vec{a} = \vec{0}$, или $\vec{b} = \vec{0}$;

8) $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}$, $\varphi = (\vec{a}\wedge\vec{b})$;

9) проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ вычисляется по формуле

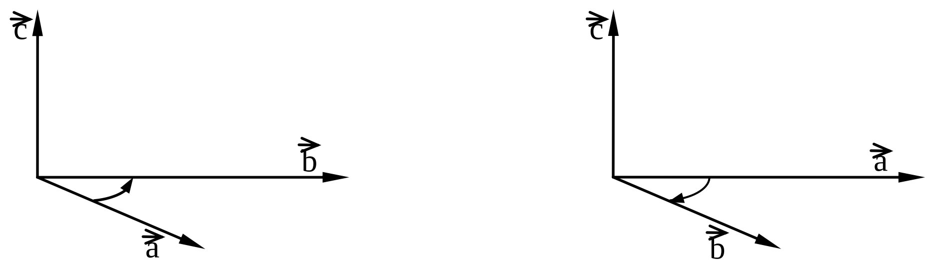
$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|};$$

10) работа силы $\vec{F}$, действующей на материальную точку при перемещении ее вдоль вектора $\vec{S}$, вычисляется по формуле

$$A = \vec{F}\cdot\vec{S}.$$

3.9 Векторное произведение векторов

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ с общим началом называется п р а в о й , если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ происходит против движения часовой стрелки, если наблюдать с конца вектора $\vec{c}$. В противном случае тройка векторов называется л е в о й (рис.10).



$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – левая тройка

Рисунок 10

В е к т о р н ы м п р о и з в е д е н и е м векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который удовлетворяет следующим условиям:

1) $|\vec{c}| = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi$, где $\varphi = (\vec{a}\,{}^\wedge \vec{b})$;

2) $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – правая тройка.

Если даны векторы $\vec{a} = \{x_1;\, y_1;\, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2;\, y_2;\, z_2\}$, то их векторное произведение находится по формуле

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad \text{или} \qquad \vec{a} \times \vec{b} = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_z \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix};\; -\begin{vmatrix} x_1 & z_z \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix};\; \begin{vmatrix} x_1 & y_z \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

С в о й с т в а и н е к о т о р ы е п р и л о ж е н и я в е к т о р н о г о п р о и з в е д е н и я

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

3) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$;

4) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$;

5) $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \,||\, \vec{b}$;

6) $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$, $\quad \vec{i} \times \vec{j} = -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}$, $\quad \vec{j} \times \vec{k} = -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}$, $\quad \vec{k} \times \vec{i} = -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}$;

7) $S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, где S – площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис.11);

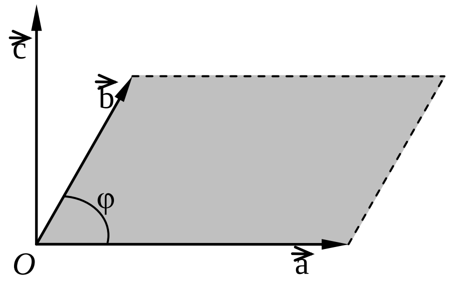


Рисунок 11

8) $S_{\Delta}=\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, где S_{Δ} – площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

9) $\vec{M}=\vec{OA}\times\vec{F}$, где $\vec{M}$ – момент силы $\vec{F}$, приложенной к точке А, относительно точки О.

3.10 Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$ и обозначается $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ или $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Если даны векторы $\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\},\vec{b}=\{x_2;y_2;z_2\},\vec{c}=\{x_3;y_3;z_3\}$, то их смешанное произведение вычисляется по формуле

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Основные свойства и некоторые приложения смешанного произведения

1) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$;

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}$;

3) $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}>0$, если $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – правая тройка,

$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}<0$, если $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – левая тройка;

4) $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=0\Leftrightarrow\ \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарны;

5) Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, вычисляется по формуле

$$V=\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|;$$

6) Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|.$$

Пример 3.2. Даны точки $A(10,6,3)$, $B(-2,4,5)$, $C(3,-4,-6)$ и $D(0,-1,2)$.

а) Найти длину вектора $5\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}$.

Координаты векторов $\overrightarrow{AB}=\{-12;-2;2\}$ и $\overrightarrow{CD}=\{-3;3;8\}$, найдем координаты вектора $5\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}$:

$$5\cdot\{-12;-2;2\}-2\cdot\{-3;3;8\}=\{-60+6;-10-6;10-16\}=\{-54;-16;-6\}.$$

Длину вектора найдем по формуле

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

получим

$$\left|5\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{(-54)^2+(-16)^2+(-6)^2}=\sqrt{2916+256+36}=\sqrt{3208}=2\sqrt{802}.$$

б) Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Скалярным произведением векторов $\overrightarrow{AB}=\{-12;-2;2\}$ и $\overrightarrow{AC}=\{-7;-10;-9\}$ будет

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-12)\cdot(-7)+(-2)\cdot(-10)+2\cdot(-9)=84+20-18=86.$$

в) Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Для нахождения косинуса угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ воспользуемся формулой

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Для этого найдем длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-12)^2+(-2)^2+(2)^2}=\sqrt{144+4+4}=\sqrt{152}=2\sqrt{38},$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-7)^2+(-10)^2+(-9)^2}=\sqrt{49+100+81}=\sqrt{230}.$$

Тогда

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{86}{2\sqrt{38}\cdot\sqrt{230}}=\frac{43}{\sqrt{8740}}=\frac{43}{2\sqrt{2185}}.$$

г) Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на направление вектора $\overrightarrow{AC}$.

Проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на направление вектора $\overrightarrow{AC}$ найдем по формуле

$$np_{\vec{d}}\,\vec{c}=\frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{d}|}.$$

Получим

$$np_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB}=\frac{86}{\sqrt{230}}=\frac{43\sqrt{230}}{115}.$$

д) Найти площадь треугольника ABC.

Из определения векторного произведения площадь треугольника ABC равна

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|.$$

Найдем векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -12 & -2 & 2\\ -7 & -10 & -9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -10 & -9\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}-12 & 2\\ -7 & -9\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}-12 & -2\\ -7 & -10\end{vmatrix}\cdot\vec{k},$$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=38\vec{i}-122\vec{j}+106\vec{k}$, то есть $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\{38;-122;106\}$.

$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{38^2+(-122)^2+106^2}=\sqrt{1444+14884+11236}=\sqrt{27564}=2\sqrt{6891}$.

Таким образом, $S_{\Delta ABC}=\sqrt{6891}$ $(кв.ед.)$

е) Найти объем пирамиды $DABC$.

Из свойств смешанного произведения векторов имеем

$$V_{пир}=\frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right|.$$

Зная координаты векторов

$$\overrightarrow{AB}=\{-12;-2;2\},\ \overrightarrow{AC}=\{-7;-10;-9\},\ \overrightarrow{AD}=\{-10;-7;-1\},$$

вычислим их смешанное произведение

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-12 & -2 & 2\\ -7 & -10 & -9\\ -10 & -7 & -1\end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix}6 & 1 & -1\\ 7 & 10 & 9\\ 10 & 7 & 1\end{vmatrix}=$$

$=-2\cdot(60+90-49+100-7-378)=-2\cdot(-184)=368$

$V_{пир}=\frac{1}{6}\cdot 368=\frac{184}{3}$.

Ответ: $V_{пир}=61\frac{1}{3}(куб.ед.)$

3.11 Контрольные вопросы

1. Что называют вектором?
2. Как найти длину вектора?
3. Какие векторы называются коллинеарными?
4. Какие векторы называются компланарными?
5. Как найти сумму или разность векторов по правилу треугольника, параллелограмма?
6. Какая совокупность векторов называется линейно-зависимой (линейно- независимой)?
7. Какую совокупность векторов называют базисом?
8. Как записать разложение вектора по базису?
9. Дать определение скалярного произведения двух векторов.
10. Какие значения могут получиться в результате скалярного произведения?
11. Перечислите свойства и приложения скалярного произведения.
12. Чему равно скалярное произведение вектора самого на себя?

13. Как вычислить скалярное произведение, если векторы заданы своими координатами?
14. Сформулируйте условие перпендикулярности двух векторов.
15. Как найти угол между векторами?
16. Какая тройка векторов считается правой (левой)?
17. Что называется векторным произведением двух векторов?
18. Запишите формулы для вычисления площадей треугольника и параллелограмма по известным координатам их вершин.
19. Что называют смешанным произведением трех векторов?
20. Сформулируйте свойства смешанного произведения трех векторов.
21. Как найти объем параллелепипеда или треугольной пирамиды с помощью смешанного произведения векторов?
22. Каково условие компланарности трех векторов?
23. От чего зависит знак смешанного произведения векторов?