

1 МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1 Понятие матрицы

Прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, называется **м а т р и ц е й** размера $m \times n$ и записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или

$$A = (a_{ij}), \text{ где } i = \overline{1, m} \text{ (т.е. } i = 1, 2, \dots, m), \\ j = \overline{1, n} \text{ (т.е. } j = 1, 2, \dots, n).$$

Числа a_{ij} называются **э л е м е н т а м и** матрицы A . Каждый элемент матрицы имеет два индекса: первый указывает номер строки, второй – номер столбца, на пересечении которых расположен этот элемент.

Матрицы A и B равны между собой, если равны все соответствующие элементы этих матриц, то есть

$$A = B, \text{ если } a_{ij} = b_{ij}, \text{ где } i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}.$$

Если число столбцов матрицы n равно числу ее строк, то такая матрица называется **к в а д р а т н о й** **м а т р и ц е й** n -го порядка.

Пример 1.1.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ – матрица } n\text{-го порядка,}$$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ – матрица второго порядка,}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ – матрица третьего порядка.}$$

Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратной матрицы порядка n образуют ее **г л а в н у ю** **д и а г о н а л ь**.

Квадратная матрица называется **д и а г о н а л ь н о й**, если все ее элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица называется **единичной**, если все ее элементы, расположенные на главной диагонали, равны единице.

Пример 1.2.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{единичная матрица третьего порядка.}$$

Матрица называется **нулевой**, если все ее элементы равны нулю.

Матрица называется **треугольной**, если все ее элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется **вектором**.

Пример 1.3.

$X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ – вектор-строка,

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} - \text{вектор-столбец.}$$

Матрица называется **транспонированной** к данной матрице A , если каждую строку данной матрицы A заменить столбцом с тем же номером, и обозначается A^T .

Пример 1.4.

$$\text{Если матрица } A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \text{ то матрица } A^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Если } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \text{ то } B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $(A^T)^T = A$.

Замечание. Для транспонирования матриц верны свойства:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$,
2. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

1.2 Действия над матрицами

1. Сложение и вычитание матриц

Эти операции вводятся только для матриц одинаковой размерности.

Суммой (разностью) двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называется матрица $C = (c_{ij})$ такая, что

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}).$$

Пример 1.5.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

2. Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ называется матрица $B = (b_{ij})$ такая, что

$$b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}).$$

Пример 1.6.

$$\text{Если } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \text{ то } 2A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

3. Произведение матриц

Матрицу A можно умножить на матрицу B , (т.е. найти $A \cdot B$) только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B .

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на матрицу $B = (b_{jk})$ называется матрица $C = (c_{ik})$ такая, что

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk} \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}; k = \overline{1, p}).$$

Пример 1.7.

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$. Найти произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 5 & 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 5 & 4 \cdot 2 + 0 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -22 & 10 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+8 & 3+0 & -9-4 \\ 2-8 & -1+0 & 3+4 \\ 10-4 & -5+0 & 15+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -13 \\ -6 & -1 & 7 \\ 6 & -5 & 17 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что $A \cdot B \neq B \cdot A$, то есть умножение матриц не обладает перестановочным свойством.

Матрицы A и B называются перестановочными, если $A \cdot B = B \cdot A$.

Пример 1.8.

Для матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ найти произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$.

Произведение матриц $A \cdot B$ не определено, так как число столбцов матрицы A , равное трем, не совпадает с числом строк матрицы B , равным двум. При этом определено произведение $B \cdot A$:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2+3 & 1+0 \\ 1+6 & 2+2 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3 Понятие определителя

Определителем (или детерминантом) второго порядка, соответствующим матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называется число $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$. Определитель матрицы A обозначается $\det A$ или Δ .

Таким образом,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}.$$

Числа a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} называются элементами определителя.

Пример 1.9.

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-5) \cdot 3 = 8 - (-15) = 8 + 15 = 23.$$

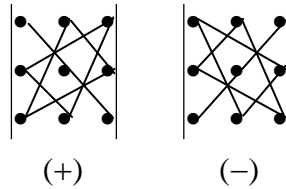
Определителем (или детерминантом) третьего порядка, соответствующим матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Правая часть формулы получается по «правилу треугольников»



или по правилу Саррюса

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Пример 1.10.

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 6 \cdot (-2) + 5 \cdot 0 \cdot (-4) - (-4) \cdot 1 \cdot (-2) - 5 \cdot 2 \cdot (-3) - 0 \cdot 6 \cdot 3 =$$

$$= -9 - 24 - 8 + 30 = -11$$

или

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{matrix} = 3 \cdot 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 6 \cdot (-2) + 5 \cdot 0 \cdot (-4) - (-4) \cdot 1 \cdot (-2) - 0 \cdot 6 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot (-3) = -11.$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n -го порядка называется определитель $(n-1)$ -го порядка, полученный путем вычеркивания i -ой строки и j -го столбца данного определителя.

Пример 1.11. Для определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

найти миноры элементов a_{11} и a_{23} .

Минором элемента a_{11} является $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, а для элемента a_{23}

минором будет $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определяется по формуле

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Пример 1.12. Для определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

найти алгебраические дополнения элементов a_{11} и a_{23} .

Алгебраические дополнения элементов a_{11} и a_{23} соответственно равны A_{11} и A_{23} :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, для определителя третьего порядка схема знаков алгебраических дополнений имеет вид:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

1.4 Свойства определителей

Свойство 1: Значение определителя не меняется после замены всех его строк соответствующими столбцами, и наоборот

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Свойство 2: Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя

$$\begin{vmatrix} k a_{11} & k a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Свойство 3: При перестановке двух строк (столбцов) определителя знак его меняется на противоположный

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

Свойство 4: Определитель с двумя одинаковыми или пропорциональными строками (столбцами) равен нулю

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ k a_{11} & k a_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 5: Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя равны нулю, то определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 6: Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) определителя прибавить соответственные элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} + k a_{11} \\ a_{21} & a_{22} + k a_{21} \end{vmatrix}.$$

Свойство 7 (о разложении определителя по строке или по столбцу):

Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо его строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

Свойство 8: Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю

$$a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} = 0.$$

Свойство 9: Если каждый элемент строки (столбца) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей

$$\begin{vmatrix} a_{11}' + a_{11}'' & a_{12} \\ a_{21}' + a_{21}'' & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}' & a_{12} \\ a_{21}' & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}'' & a_{12} \\ a_{21}'' & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Пример 1.13.

Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$,

- а) разложив его по элементам первой строки;
- б) разложив его по элементам второго столбца.

Решение.

а)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3 - 0) - 2 \cdot (-15 + 12) - 4 \cdot (0 + 2) =$$

$$= -9 + 6 - 8 = -11.$$

б)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-15 + 12) + 1 \cdot (-9 - 8) =$$

$$= 6 - 17 = -11.$$

Замечание. Можно, используя свойство б, не изменяя величины определителя, преобразовать его так, чтобы в выбранной строке (или столбце) все элементы, кроме одного, обратились в нуль.

Пример 1.14. Вычислить определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 6 & 4 \end{vmatrix}, \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение.

а) Определитель равен нулю, так как второй и третий столбец пропорциональны (элементы третьего столбца можно получить, домножив соответствующие элементы второго столбца на коэффициент -2).

б) Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.

Получаем $\Delta = 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 120$.

Пример 1.15. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix},$$

- а) разложив его по элементам второй строки;
 б) разложив его по элементам третьего столбца;
 в) получив предварительно нули в первой строке.

Решение.

а) По теореме о разложении определителя по элементам второй строки получим:

$$\det A = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{24} \cdot A_{24}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 \cdot (-18 - 4 + 0 + 2 + 12 - 0) - 2 \cdot (12 + 12 + 12 - 6 - 36 - 8) - 3 \cdot (0 - 9 - 3 - 0 + 2 + 27) + 2 \cdot (0 - 18 - 12 - 0 + 4 + 36) =$$

$$= -4 \cdot (-8) - 2 \cdot (-14) - 3 \cdot 17 + 2 \cdot 10 = 32 + 28 - 51 + 20 = 29.$$

б) При разложении определителя по элементам четвертого столбца получим:

$$\det A = a_{14} \cdot A_{14} + a_{24} \cdot A_{24} + a_{34} \cdot A_{34} + a_{44} \cdot A_{44}.$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot (0 - 12 - 9 - 0 + 8 + 24) + 2 \cdot (0 - 18 - 12 - 0 + 4 + 36) - 1 \cdot (-16 - 27 - 16 + 24 + 6 + 48) + 3 \cdot (-8 - 27 + 0 + 24 - 0 + 24) =$$

$$= -11 + 20 - 19 + 39 = 29.$$

в) Вычислим определитель, получив предварительно нули в первой строке. Для этого используем свойство 6 определителей. При получении нулей в строке работаем со столбцами. Прибавим к элементам третьего столбца соответствующие элементы первого столбца, умноженные на (-2) , затем к элементам первого столбца прибавим элементы четвертого столбца, умноженные на (-2) . И, наконец, к элементам второго столбца прибавим элементы четвертого столбца, умноженные на 3. Тогда в первой строке все элементы, кроме последнего, будут нулями. Разложим полученный таким образом определитель по элементам первой строки и вычислим его:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -5 & 2 \\ 3 & 0 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ -3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \\ -3 & 8 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & -4 \\ -3 & 8 & -2 \end{vmatrix} = - (0 + 48 - 40 - 45 + 8 + 0) = - (-29) = 29.$$

1.5 Невырожденные матрицы

Пусть задана матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица A называется **н е в ы р о ж д е н н о й** (неособенной),

если ее определитель $\Delta = \det A \neq 0$. В противном случае матрица A называется вырожденной (особенной).

Матрица \tilde{A} называется союзной (присоединенной) к матрице A , если

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$).

1.6 Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется обратной для квадратной матрицы A , если верно равенство

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где E – единичная матрица.

Теорема. Всякая невырожденная матрица имеет единственную обратную матрицу.

Если матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

невырожденная, то есть $\det A \neq 0$, то для нее обратную матрицу можно найти по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}.$$

Пример 1.16. Для матрицы A найти обратную матрицу A^{-1} , если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Сначала найдем определитель матрицы A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 24 - 6 - 9 + 4 - 4 = 10.$$

Так как $\det A \neq 0$, то матрица A – невырожденная, и, следовательно, существует обратная ей матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}, \text{ где } \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3,$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 12) = 14,$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 + 3) = -1,$$

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 9 = 8,$$

$$A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 6) = 5,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 3 = 5,$$

$$A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(4 + 6) = -10,$$

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5.$$

Тогда получим

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 14 & 8 & -10 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3 & -0,1 & 0,5 \\ 1,4 & 0,8 & -1 \\ 0,5 & 0,5 & -0,5 \end{pmatrix}.$$

Проверим выполнение условия $A \cdot A^{-1} = E$.

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 14 & 8 & -10 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Таким образом, обратная матрица найдена верно.

1.7 Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выберем в матрице A произвольные k строк и k столбцов ($k \leq \min(m, n)$).

Определитель порядка k , составленный из элементов, стоящих на пересечении выделенных k строк и k столбцов, называется **минором** k -го порядка этой матрицы.

Рангом матрицы A называется наибольший порядок ее миноров, отличных от нуля, и обозначается $\text{rang}(A)$ или $r(A)$.

Если $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$, то матрицы A и B называются эквивалентными и обозначаются $A \sim B$.

Вычисление ранга матрицы можно производить методом окаймляющих миноров и методом элементарных преобразований.

1. Вычисление ранга матрицы методом окаймляющих миноров

Если в матрице A имеется минор k -го порядка, неравный нулю, а все ее миноры $(k+1)$ -го порядка, окаймляющие этот минор, равны нулю, то ранг матрицы A равен k . В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор $(k+1)$ -го порядка, и вся процедура повторяется.

Пример 1.17. Вычислить методом окаймляющих миноров ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 \\ 4 & 15 & 8 & 7 \\ 2 & 17 & 4 & 13 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Так как минор второго порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 15 \end{vmatrix} = 26 \neq 0,$$

то ранг матрицы A не меньше 2. Найдем для этого минора окаймляющие миноры третьего порядка.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 15 & 8 \\ 2 & 17 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{I строка} \cdot (-2) + \text{II строка} \\ \text{II строка} \\ \text{III строка} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 13 & 0 \\ 4 & 15 & 8 \\ 2 & 17 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 15 & 7 \\ 2 & 17 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{I строка} \cdot (-2) + \text{II строка} \\ \text{I строка} \cdot (-1) + \text{III строка} \\ \text{II строка} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 13 & 13 \\ 0 & 16 & 16 \\ 4 & 15 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, все окаймляющие миноры равны нулю.

Следовательно, $\text{rang}(A) = 2$.

2. Вычисление ранга матрицы методом элементарных преобразований

Строку или столбец матрицы будем называть рядом.

К элементарным преобразованиям матрицы относятся:

- 1) перестановка двух параллельных рядов матрицы;
- 2) умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;
- 3) прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на некоторое число;
- 4) вычеркивание строки матрицы, все элементы которой равны нулю.

Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях.

Используя элементарные преобразования, матрицу приводят к виду, когда все ее элементы, кроме $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$ ($r \leq \min(m, n)$), равны нулю. Отсюда, ранг матрицы равен r .

Пример 1.18. Вычислить ранг матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

методом элементарных преобразований.

Решение.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \text{I строка} \cdot (-1) \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \text{I строка} \leftrightarrow \text{II строка} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{matrix} \text{II строка} \cdot \frac{1}{2} \\ \text{I строка} \cdot (-3) + \text{III строка} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -11 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \text{III строка} \cdot 11 + \text{II строка} \\ \text{III строка} \cdot (-1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда $\text{rang}(B) = 2$, так как $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

1.8 Контрольные вопросы

1. Что называется матрицей?
2. Как классифицируются матрицы по размерам?
3. Какая матрица называется нулевой?
4. Какая матрица называется единичной?
5. Какие матрицы равны между собой?
6. Как выполняется операция транспонирования матрицы?
7. Как найти сумму (разность) матриц?

8. Как найти произведение матрицы на число?
9. Какие матрицы можно перемножить?
10. Как найти произведение матриц?
11. Что называется определителем?
12. Для каких матриц может быть найден определитель?
13. Как вычислить определитель второго порядка?
14. Как вычисляется минор элемента определителя?
15. Что является алгебраическим дополнением элемента матрицы?
16. Какие есть способы вычисления определителя третьего порядка?
17. Какими свойствами обладает определитель?
18. Какая матрица называется невырожденной?
19. Какая матрица является обратной по отношению к данной матрице?
20. Какие условия существования обратной матрицы?
21. Какие этапы вычисления обратной матрицы?
22. Что называется рангом матрицы?
23. Какие преобразования матрицы называются элементарными?
24. Какие есть способы нахождения ранга матрицы?
25. Как изменится ранг матрицы, если вычеркнуть строку, все элементы которой равны нулю?

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда данная система имеет единственное решение, которое определяется по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ – определитель основной матрицы системы,

Δ_k – определитель, получаемый из определителя Δ заменой k -го столбца столбцом свободных членов.

Например, рассмотрим систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Найдем определитель данной системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Пусть $\Delta \neq 0$, тогда данная система имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Замечание. Можно показать, что:

1) если $\Delta = 0$ и хотя бы один из определителей Δ_1, Δ_2 или Δ_3 отличен от нуля, то данная система не имеет решения, то есть несовместна;

2) если $\Delta = 0$ и $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, то система имеет бесконечное множество решений или не имеет решения, то есть она неопределенна или несовместна.

Пример 2.2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0, \\ 2x - y + 4z = 5, \\ 3x + y - z = 2. \end{cases}$$

Решение.

Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то данная система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Найдем Δ_x , Δ_y и Δ_z .

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 20, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15.$$

$$\text{Тогда } x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $x = 0,5$, $y = 2$, $z = 1,5$.

2.3 Матричный метод решения системы линейных уравнений

Рассмотрим систему трех линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Составим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда данную систему можно записать в матричной форме $A \cdot X = B$.

Пусть $\det A \neq 0$, следовательно, существует обратная матрица A^{-1} . Умножив это матричное уравнение слева на A^{-1} , получим

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B, \quad E \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Следовательно, решение матричного уравнения имеет вид

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Пример 2.3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0, \\ 2x - y + 4z = 5, \\ 3x + y - z = 2. \end{cases}$$

Придавая неизвестным $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$, которые называются свободными, произвольные значения, получим треугольную систему, из которой последовательно найдем все остальные неизвестные x_k, x_{k-1}, \dots, x_1 .

В случае треугольной системы из последнего уравнения находим $x_n = B_n$, затем, подставляя значение x_n в предыдущее уравнение, находим x_{n-1} и т.д.

Замечание. На практике удобнее работать не с системой уравнений, а с ее расширенной матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками.

Пример 2.4. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение.

Произведем элементарные преобразования над строками расширенной матрицы системы

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{l} \text{I строка} \cdot (-2) + \text{II строка} \\ \text{I строка} \cdot (-3) + \text{III строка} \\ \text{I строка} \cdot (-5) + \text{IV строка} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{array}{l} \text{III строка} : (-2) \\ \text{IV строка} : (-6) \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{l} \text{III строка} \cdot (-1) + \text{IV строка} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{array}{l} \text{II строка} \cdot (-1) + \text{III строка} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Полученная матрица соответствует системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Осуществляя обратный ход, находим $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$.

2.5 Системы линейных однородных уравнений

Система линейных уравнений называется однородной, если все свободные члены этой системы равны нулю.

Рассмотрим систему линейных однородных уравнений

Заметим, что третье уравнение является следствием первых двух, так как оно получается прибавлением к первому уравнению удвоенного второго. Поэтому третье уравнение можно из системы исключить.

Получаем однородную систему двух уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 0, \\ x - y + 4z = 0. \end{cases}$$

Пусть $z = t$, тогда

$$\begin{cases} 3x + 4y = -2t, \\ x - y = -4t. \end{cases}$$

Отсюда $x = -\frac{18}{7}t$, $y = \frac{10}{7}t$.

Следовательно, решение системы можно записать в виде

$$x = -\frac{18}{7}t, \quad y = \frac{10}{7}t, \quad z = t,$$

где t – произвольное число.

2.6 Контрольные вопросы

1. Дайте определение системы линейных алгебраических уравнений.
2. Что называется решением системы?
3. Какая матрица называется основной матрицей системы, расширенной?
4. Какая система линейных алгебраических уравнений называется совместной, несовместной?
5. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.
6. Сформулируйте правило Крамера решения систем линейных уравнений.
7. Сформулируйте матричный метод решения систем линейных уравнений.
8. В чем состоит метод Гаусса? Сформулируйте схему его применения.
9. Какая система линейных алгебраических уравнений называется однородной, неоднородной?
10. Когда система линейных алгебраических уравнений имеет ненулевые решения?