# 1 МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

## 1.1 Понятие матрицы

Прямоугольная таблица чисел, состоящая из $m$ строк и $n$ столбцов, называется **матрицей** размера $m \times n$ и записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или

$$A = (a_{ij}), \text{ где } i = \overline{1,m} \text{ (т.е. } i = 1,2,\dots,m),$$
$$j = \overline{1,n} \text{ (т.е. } j = 1,2,\dots,n).$$

Числа $a_{ij}$ называются **элементами** матрицы $A$. Каждый элемент матрицы имеет два индекса: первый указывает номер строки, второй – номер столбца, на пересечении которых расположен этот элемент.

Матрицы $A$ и $B$ равны между собой, если равны все соответствующие элементы этих матриц, то есть

$$A = B, \text{ если } a_{ij} = b_{ij}, \text{ где } i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}.$$

Если число столбцов матрицы $n$ равно числу ее строк, то такая матрица называется **квадратной матрицей** $n$-го порядка.

*Пример 1.1.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ – матрица } n\text{-го порядка,}$$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ – матрица второго порядка,}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ – матрица третьего порядка.}$$

Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратной матрицы порядка $n$ образуют ее **главную диагональ**.

Квадратная матрица называется **диагональной**, если все ее элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица называется е д и н и ч н о й , если все ее элементы, расположенные на главной диагонали, равны единице.

*Пример 1.2.*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – единичная матрица третьего порядка.}$$

Матрица называется н у л е в о й , если все ее элементы равны нулю.

Матрица называется т р е у г о л ь н о й , если все ее элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется в е к т о р о м .

*Пример 1.3.*

$$X = (x_1\ x_2 \dots x_n) \text{ – вектор-строка,}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} \text{ – вектор-столбец.}$$

Матрица называется т р а н с п о н и р о в а н н о й к данной матрице $A$, если каждую строку данной матрицы $A$ заменить столбцом с тем же номером, и обозначается $A^T$.

*Пример 1.4.*

Если матрица $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, то матрица $A^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Если $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, то $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Заметим, что $(A^T)^T = A$.

<u>Замечание</u>. Для транспонирования матриц верны свойства:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$,
2. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

## 1.2 Действия над матрицами

1. Сложение и вычитание матриц

Эти операции вводятся только для матриц одинаковой размерности.

Суммой (разностью) двух матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ называется матрица $C=(c_{ij})$ такая, что

$$c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}\quad \left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right).$$

*Пример 1.5.*

$$\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\ -2 & -5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 10\end{pmatrix}.$$

2. Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ на число $\lambda$ называется матрица $B=(b_{ij})$ такая, что

$$b_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}\quad \left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right).$$

*Пример 1.6.*

Если $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$, то $2A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 4\\ 6 & 8 & 10\end{pmatrix}$.

3. Произведение матриц

Матрицу $A$ можно умножить на матрицу $B$, (т.е. найти $A\cdot B$) только в том случае, когда число столбцов матрицы $A$ равно числу строк матрицы $B$.

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ на матрицу $B=(b_{jk})$ называется матрица $C=(c_{ik})$ такая, что

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk}\quad \left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n};\ k=\overline{1,p}\right).$$

*Пример 1.7.*

Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & -2\\ 5 & -1\end{pmatrix}$. Найти произведения $A\cdot B$ и $B\cdot A$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & -2\\ 5 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(-3)+(-1)\cdot 1+3\cdot 5 & 2\cdot 2+(-1)\cdot(-2)+3\cdot(-1)\\ 4\cdot(-3)+0\cdot 1+(-2)\cdot 5 & 4\cdot 2+0\cdot(-2)+(-2)\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 3\\ -22 & 10\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 1 & -2\\ 5 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 0 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6+8 & 3+0 & -9-4\\ 2-8 & -1+0 & 3+4\\ 10-4 & -5+0 & 15+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3 & -13\\ -6 & -1 & 7\\ 6 & -5 & 17\end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что $A\cdot B\neq B\cdot A$, то есть умножение матриц не обладает перестановочным свойством.

Матрицы $A$ и $B$ называются п е р е с т а н о в о ч н ы м и , если $A\cdot B=B\cdot A$.

*Пример 1.8.*

Для матриц $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}$ найти произведения $A\cdot B$ и $B\cdot A$.

Произведение матриц $A\cdot B$ не определено, так как число столбцов матрицы $A$, равное трем, не совпадает с числом строк матрицы $B$, равным двум. При этом определено произведение $B\cdot A$:

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&1\\3&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+9&2+3&1+0\\1+6&2+2&1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&5&1\\7&4&1\end{pmatrix}.$$

## 1.3 Понятие определителя

О п р е д е л и т е л е м (и л и д е т е р м и н а н т о м) в т о р о г о п о р я д к а , соответствующим матрице

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$$

называется число $a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}$. Определитель матрицы $A$ обозначается $\det A$ или $\Delta$.

Таким образом,

$$\det A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}.$$

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называются э л е м е н т а м и о п р е д е л и т е л я .

*Пример 1.9.*

Вычислить определитель $\begin{vmatrix}2&-5\\3&4\end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix}2&-5\\3&4\end{vmatrix}=2\cdot4-(-5)\cdot3=8-(-15)=8+15=23.$$

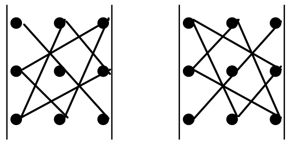
О п р е д е л и т е л е м (и л и д е т е р м и н а н т о м) т р е т ь е г о п о р я д к а , соответствующим матрице

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

называется число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Правая часть формулы получается по «правилу треугольников»



(+) (−)

или по правилу Саррюса

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \quad = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

*Пример 1.10.*

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot(-3) + 2\cdot 6\cdot(-2) + 5\cdot 0\cdot(-4) - (-4)\cdot 1\cdot(-2) - 5\cdot 2\cdot(-3) - 0\cdot 6\cdot 3 =$$

$$= -9 - 24 - 8 + 30 = -11$$

или

$$\left|\begin{matrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{matrix} = 3\cdot 1\cdot(-3) + 2\cdot 6\cdot(-2) + 5\cdot 0\cdot(-4) - (-4)\cdot 1\cdot(-2) - 0\cdot 6\cdot 3 - 2\cdot 5\cdot(-3) = \text{-}11.$$

М и н о р о м $M_{ij}$ элемента $a_{ij}$ определителя $n$-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный путем вычеркивания $i$-ой строки и $j$-го столбца данного определителя.

*Пример 1.11.* Для определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

найти миноры элементов $a_{11}$ и $a_{23}$.

Минором элемента $a_{11}$ является $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, а для элемента $a_{23}$

минором будет $M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Алгебраическое дополнение $A_{ij}$ элемента $a_{ij}$ определяется по формуле

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}.$$

*Пример 1.12*. Для определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

найти алгебраические дополнения элементов $a_{11}$ и $a_{23}$.

Алгебраические дополнения элементов $a_{11}$ и $a_{23}$ соответственно равны $A_{11}$ и $A_{23}$:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot M_{11}=M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot M_{23}=-M_{23}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, для определителя третьего порядка схема знаков алгебраических дополнений имеет вид:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

## 1.4 Свойства определителей

<u>Свойство 1</u>: Значение определителя не меняется после замены всех его строк соответствующими столбцами, и наоборот

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

<u>Свойство 2</u>: Общий множитель элементов какой-либо строки (столбца) можно вынести за знак определителя

$$\begin{vmatrix} k\,a_{11} & k\,a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=k\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

<u>Свойство 3</u>: При перестановке двух строк (столбцов) определителя знак его меняется на противоположный

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

Свойство 4: Определитель с двумя одинаковыми или пропорциональными строками (столбцами) равен нулю

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ k\,a_{11} & k\,a_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 5: Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя равны нулю, то определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 6: Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) определителя прибавить соответственные элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} + k\,a_{11} \\ a_{21} & a_{22} + k\,a_{21} \end{vmatrix}.$$

Свойство 7 (о разложении определителя по строке или по столбцу):

Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо его строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

Свойство 8: Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю

$$a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} = 0.$$

Свойство 9: Если каждый элемент строки (столбца) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

*Пример 1.13.*

Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$,

а) разложив его по элементам первой строки;

б) разложив его по элементам второго столбца.

Решение.

а)

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&2&-4\\5&1&6\\-2&0&-3\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}1&6\\0&-3\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}5&6\\-2&-3\end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix}5&1\\-2&0\end{vmatrix}=3\cdot(-3-0)-2\cdot(-15+12)-4\cdot(0+2)=$$

$$=-9+6-8=-11.$$

б)

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&2&-4\\5&1&6\\-2&0&-3\end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix}5&6\\-2&-3\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}3&-4\\-2&-3\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}3&-4\\5&6\end{vmatrix}=-2\cdot(-15+12)+1\cdot(-9-8)=$$

$$=6-17=-11.$$

Замечание. Можно, используя свойство 6, не изменяя величины определителя, преобразовать его так, чтобы в выбранной строке (или столбце) все элементы, кроме одного, обратились в нуль.

*Пример 1.14.* Вычислить определители:

$$\text{а) }\begin{vmatrix}2&-1&2&0\\0&2&-4&-1\\3&-1&2&3\\1&-3&6&4\end{vmatrix},\qquad \text{б) }\begin{vmatrix}5&0&0&0\\-4&2&0&0\\1&2&3&0\\2&-1&3&4\end{vmatrix}.$$

Решение.

а) Определитель равен нулю, так как второй и третий столбец пропорциональны (элементы третьего столбца можно получить, домножив соответствующие элементы второго столбца на коэффициент $-2$).

б) Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.

Получаем $\Delta=5\cdot2\cdot3\cdot4=120$.

*Пример 1.15.* Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix}2&-3&4&1\\4&-2&3&2\\3&0&2&1\\3&-1&4&3\end{vmatrix},$$

а) разложив его по элементам второй строки;
б) разложив его по элементам третьего столбца;
в) получив предварительно нули в первой строке.

Решение.

а) По теореме о разложении определителя по элементам второй строки получим:

$$\det \mathrm{A}=a_{21}\cdot A_{21}+a_{22}\cdot A_{22}+a_{23}\cdot A_{23}+a_{24}\cdot A_{24}.$$

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1\\ 4 & -2 & 3 & 2\\ 3 & 0 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 4 & 3\end{vmatrix} = -4\cdot\begin{vmatrix} -3 & 4 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 4 & 3\end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1\\ 3 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 3\end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4\\ 3 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix} =$$

=-4·(-18-4+0+2+12-0) -2·(12+12+12-6-36-8) -3·(0-9-3-0+2+27)+2·(0-18-12-0+4+36)=
=-4·(-8)-2·(-14)-3·17+2·10=32+28-51+20=29.

б) При разложении определителя по элементам четвертого столбца получим:

$$\det A= a_{14}\cdot A_{14}+a_{24}\cdot A_{24}+a_{34}\cdot A_{34}+a_{44}\cdot A_{44}.$$

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1\\ 4 & -2 & 3 & 2\\ 3 & 0 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 4 & 3\end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3\\ 3 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4\\ 3 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4\\ 4 & -2 & 3\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4\\ 4 & -2 & 3\\ 3 & 0 & 2\end{vmatrix} =$$

=-1·(0-12-9-0+8+24)+2·(0-18-12-0+4+36)-1·(-16-27-16+24+6+48)+3·(-8-27+0+24-0+24)=
=-11+20-19+39=29.

в) Вычислим определитель, получив предварительно нули в первой строке. Для этого используем свойство 6 определителей. При получении нулей в строке работаем со столбцами. Прибавим к элементам третьего столбца соответствующие элементы первого столбца, умноженные на (-2), затем к элементам первого столбца прибавим элементы четвертого столбца, умноженные на (-2). И, наконец, к элементам второго столбца прибавим элементы четвертого столбца, умноженные на 3. Тогда в первой строке все элементы, кроме последнего, будут нулями. Разложим полученный таким образом определитель по элементам первой строки и вычислим его:

$$\det A=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1\\ 4 & -2 & 3 & 2\\ 3 & 0 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 4 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 1\\ 4 & -2 & -5 & 2\\ 3 & 0 & -4 & 1\\ 3 & -1 & -2 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -5 & 2\\ 1 & 0 & -4 & 1\\ -3 & -1 & -2 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 4 & -5 & 2\\ 1 & 3 & -4 & 1\\ -3 & 8 & -2 & 3\end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & 4 & -5\\ 1 & 3 & -4\\ -3 & 8 & -2\end{vmatrix} = -(0+48-40-45+8+0) = -(-29) = 29.$$

## 1.5 Невырожденные матрицы

Пусть задана матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица $A$ называется н е в ы р о ж д е н н о й (неособенной), если ее определитель $\Delta = \det A \neq 0$. В противном случае матрица $A$ называется вырожденной (особенной).

Матрица $\tilde{A}$ называется союзной (присоединенной) к матрице $A$, если

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где $A_{ij}$ – алгебраические дополнения элементов $a_{ij}$ $(i,\ j = \overline{1,n})$.

## 1.6 Обратная матрица

Матрица $A^{-1}$ называется обратной для квадратной матрицы $A$, если верно равенство

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где $E$ – единичная матрица.

Теорема. Всякая невырожденная матрица имеет единственную обратную матрицу.

Если матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

невырожденная, то есть $\det A \neq 0$, то для нее обратную матрицу можно найти по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}.$$

*Пример 1.16*. Для матрицы $A$ найти обратную матрицу $A^{-1}$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Сначала найдем определитель матрицы $A$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 24 - 6 - 9 + 4 - 4 = 10.$$

Так как $\det A \neq 0$, то матрица $A$ – невырожденная, и, следовательно, существует обратная ей матрица

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\tilde{A},\text{ где }\tilde{A}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}.$$

Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}-1&4\\1&-1\end{vmatrix}=1-4=-3,$$

$$A_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}2&4\\3&-1\end{vmatrix}=-(-2-12)=14,$$

$$A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2&-1\\3&1\end{vmatrix}=2+3=5,$$

$$A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}2&-3\\1&-1\end{vmatrix}=-(-2+3)=-1,$$

$$A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1&-3\\3&-1\end{vmatrix}=-1+9=8,$$

$$A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}=-(1-6)=5,$$

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}2&-3\\-1&4\end{vmatrix}=8-3=5,$$

$$A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1&-3\\2&4\end{vmatrix}=-(4+6)=-10,$$

$$A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}=-1-4=-5.$$

Тогда получим

$$A^{-1}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}-3&-1&5\\14&8&-10\\5&5&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}3&-0{,}1&0{,}5\\1{,}4&0{,}8&-1\\0{,}5&0{,}5&-0{,}5\end{pmatrix}.$$

Проверим выполнение условия $A\cdot A^{-1}=E$.

$$A\cdot A^{-1}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&-1&4\\3&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&-1&5\\14&8&-10\\5&5&-5\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}10&0&0\\0&10&0\\0&0&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

Таким образом, обратная матрица найдена верно.

## 1.7 Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Выберем в матрице $A$ произвольные $k$ строк и $k$ столбцов $(k \le \min(m,n))$.

Определитель порядка $k$, составленный из элементов, стоящих на пересечении выделенных $k$ строк и $k$ столбцов, называется м и н о р о м $k$-го порядка этой матрицы.

Р а н г о м матрицы $A$ называется наибольший порядок ее миноров, отличных от нуля, и обозначается $rang(A)$ или $r(A)$.

Если $rang(A)=rang(B)$, то матрицы $A$ и $B$ называются эквивалентными и обозначаются $A \sim B$.

Вычисление ранга матрицы можно производить методом окаймляющих миноров и методом элементарных преобразований.

1. Вычисление ранга матрицы методом окаймляющих миноров

Если в матрице $A$ имеется минор $k$-го порядка, неравный нулю, а все ее миноры $(k+1)$-го порядка, окаймляющие этот минор, равны нулю, то ранг матрицы $A$ равен $k$. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор $(k+1)$-го порядка, и вся процедура повторяется.

*Пример 1.17.* Вычислить методом окаймляющих миноров ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 \\ 4 & 15 & 8 & 7 \\ 2 & 17 & 4 & 13 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Так как минор второго порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 15 \end{vmatrix} = 26 \ne 0,$$

то ранг матрицы $A$ не меньше 2. Найдем для этого минора окаймляющие миноры третьего порядка.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 15 & 8 \\ 2 & 17 & 4 \end{vmatrix} = \left| \text{I строка} \cdot (-2) + \text{II строка} \right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 13 & 0 \\ 2 & 17 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 15 & 7 \\ 2 & 17 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{I строка} \cdot (-2) + \text{II строка} \\ \text{I строка} \cdot (-1) + \text{III строка} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 13 & 13 \\ 0 & 16 & 16 \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, все окаймляющие миноры равны нулю.

Следовательно, $rang(A)$=2.

2. Вычисление ранга матрицы методом элементарных преобразований

Строку или столбец матрицы будем называть рядом.

К элементарным преобразованиям матрицы относятся:

1) перестановка двух параллельных рядов матрицы;
2) умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;
3) прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на некоторое число;
4) вычеркивание строки матрицы, все элементы которой равны нулю.

Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях.

Используя элементарные преобразования, матрицу приводят к виду, когда все ее элементы, кроме $a_{11}, a_{22}, ..., a_{rr}$ $\left(r \le \min(m,n)\right)$, равны нулю. Отсюда, ранг матрицы равен $r$.

*Пример 1.18.* Вычислить ранг матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

методом элементарных преобразований.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \left|\text{II строка} \cdot (-1)\right| \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \left|\text{I строка} \leftrightarrow \text{II строка}\right| \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{vmatrix} \text{II строка} \cdot \frac{1}{2} \\ \text{I строка} \cdot (-3) + \text{III строка} \end{vmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -11 & 22 \end{pmatrix} \sim \left|\text{II строка} \cdot 11 + \text{III строка}\right| \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $rang(B) = 2$, так как $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \ne 0$.

## 1.8 Контрольные вопросы

1. Что называется матрицей?
2. Как классифицируются матрицы по размерам?
3. Какая матрица называется нулевой?
4. Какая матрица называется единичной?
5. Какие матрицы равны между собой?
6. Как выполняется операция транспонирования матрицы?
7. Как найти сумму (разность) матриц?

8. Как найти произведение матрицы на число?
9. Какие матрицы можно перемножить?
10. Как найти произведение матриц?
11. Что называется определителем?
12. Для каких матриц может быть найден определитель?
13. Как вычислить определитель второго порядка?
14. Как вычисляется минор элемента определителя?
15. Что является алгебраическим дополнением элемента матрицы?
16. Какие есть способы вычисления определителя третьего порядка?
17. Какими свойствами обладает определитель?
18. Какая матрица называется невырожденной?
19. Какая матрица является обратной по отношению к данной матрице?
20. Какие условия существования обратной матрицы?
21. Какие этапы вычисления обратной матрицы?
22. Что называется рангом матрицы?
23. Какие преобразования матрицы называются элементарными?
24. Какие есть способы нахождения ранга матрицы?
25. Как изменится ранг матрицы, если вычеркнуть строку, все элементы которой равны нулю?

# 2 СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

## 2.1 Основные понятия

Система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где числа $a_{ij}$ – коэффициенты при неизвестных,

числа $b_i$ – свободные члены,

$x_j$ – неизвестные $\left(i = \overline{1,m}\,;\ j = \overline{1,n}\right)$.

Р е ш е н и е м системы называются значения неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$, при подстановке которых в систему все уравнения обращаются в верные равенства.

Система уравнений называется с о в м е с т н о й , если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется о п р е д е л е н н о й , если она имеет единственное решение, и н е о п р е д е л е н н о й , если она имеет более одного решения.

Р е ш и т ь систему – это значит определить, совместна она или несовместна, и в случае совместности системы найти все ее решения.

Две системы называются р а в н о с и л ь н ы м и (эквивалентными), если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот.

Система линейных уравнений называется о д н о р о д н о й , если все свободные члены равны нулю. Однородная система всегда совместна.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется о с н о в н о й м а т р и ц е й системы.

Матрица

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

называется *расширенной матрицей* системы.

<u>Теорема Кронекера-Капелли</u>**.** Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы, то есть

$$rang(A) = rang(\overline{A}).$$

Если ранги матриц $A$ и $\overline{A}$ равны числу неизвестных, то есть $rang(A) = rang(\overline{A}) = n$, то система имеет единственное решение.

Если $rang(A) = rang(\overline{A}) < n$, то система имеет бесчисленное множество решений.

*Пример 2.1.* Проверить совместность системы линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение.

Совместность системы уравнений проверим по теореме Кронекера-Капелли. С помощью элементарных преобразований найдем ранги матриц $A$ и $\overline{A}$. Для этого приведем расширенную матрицу к ступенчатому виду. Элементы первой строки умножим на $0{,}5$, затем к третьей строке прибавим первую строку, умноженную на (-1), а ко второй строке первую, умноженную на (-4). Далее к элементам третьей строки прибавим соответствующие элементы второй строки, умноженные на $(-0{,}5)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}5 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1.5 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы $A$ данной системы равен трем и совпадает с рангом расширенной матрицы $\overline{A}$, число неизвестных системы также равно 3. Следовательно, система совместна и имеет единственное решение.

## 2.2 Решение системы линейных уравнений по формулам Крамера

Пусть задана система $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Пусть

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Тогда данная система имеет единственное решение, которое определяется по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где $\Delta$ – определитель основной матрицы системы,

$\Delta_k$ – определитель, получаемый из определителя $\Delta$ заменой $k$-го столбца столбцом свободных членов.

Например, рассмотрим систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Найдем определитель данной системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Пусть $\Delta \neq 0$, тогда данная система имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Замечание. Можно показать, что:

1) если $\Delta = 0$ и хотя бы один из определителей $\Delta_1, \Delta_2$ или $\Delta_3$ отличен от нуля, то данная система не имеет решения, то есть несовместна;

2) если $\Delta = 0$ и $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, то система имеет бесконечное множество решений или не имеет решения, то есть она неопределенна или несовместна.

*Пример 2.2.* Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0, \\ 2x - y + 4z = 5, \\ 3x + y - z = 2. \end{cases}$$

Решение.

Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то данная система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Найдем $\Delta_x$, $\Delta_y$ и $\Delta_z$.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 20, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 15.$$

Тогда $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}.$

Ответ: $x = 0{,}5$, $y = 2$, $z = 1{,}5$.

## 2.3 Матричный метод решения системы линейных уравнений

Рассмотрим систему трех линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Составим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда данную систему можно записать в матричной форме $A \cdot X = B$.

Пусть $\det A \neq 0$, следовательно, существует обратная матрица $A^{-1}$. Умножив это матричное уравнение слева на $A^{-1}$, получим

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B, \quad E \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Следовательно, решение матричного уравнения имеет вид

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

*Пример 2.3.* Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0, \\ 2x - y + 4z = 5, \\ 3x + y - z = 2. \end{cases}$$

Решение.

Введем обозначения

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 4\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0\\ 5\\ 2\end{pmatrix}.$$

Тогда данную систему можно записать в матричной форме $A\cdot X=B$. Решение данного уравнения имеет вид $X=A^{-1}\cdot B$.

Матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 4\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$ - невырожденная, т.к. $\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 4\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=10\neq 0$.

Следовательно, для матрицы $A$ существует обратная матрица $A^{-1}$ (пример 1.16)

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\tilde{A}=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -1 & 5\\ 14 & 8 & -10\\ 5 & 5 & -5\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -1 & 5\\ 14 & 8 & -10\\ 5 & 5 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 5\\ 2\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}5\\ 20\\ 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 2\\ 1{,}5\end{pmatrix}.$$

Итак, $x=0{,}5$, $y=2$, $z=1{,}5$.

## 2.4 Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

Прямой ход.

Пусть $a_{11}\neq 0$. Сначала исключим неизвестное $x_1$ из всех уравнений системы кроме первого. Для этого разделим обе части первого уравнения на $a_{11}$, получим

$$\begin{cases}x_1+a_{12}'x_2+\ldots+a_{1n}'x_n=b_1'\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

где

$$a_{1k}'=\frac{a_{1k}}{a_{11}},\ b_1'=\frac{b_1}{a_{11}},\ k=2,3,\ldots,n.$$

Умножим первое уравнение на $(-a_{21})$ и сложим его со вторым уравнением, затем первое уравнение умножим на $(-a_{31})$ и сложим с третьим и т.д. в результате получим

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}{}' x_2 + \ldots + a_{1n}{}' x_n = b_1{}' \\ \quad a_{22}{}' x_2 + \ldots + a_{2n}{}' x_n = b_2{}' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad a_{m2}{}' x_2 + \ldots + a_{mn}{}' x_n = b_m{}' \end{cases}$$

где

$$a_{ik}{}' = a_{ik} - \frac{a_{1k}}{a_{11}} a_{i1}, \quad i = 2,3,\ldots,m, \quad k = 2,3,\ldots,n$$

$$b_i{}' = b_i - \frac{b_1}{a_{11}} a_{i1}, \quad i = 2,3,\ldots,m.$$

Аналогично, можно исключить неизвестное $x_2$ из всех уравнений кроме первого и второго.

Продолжая этот процесс, может получиться уравнение вида $0 = 0$, его отбрасывают. Если получится уравнение, в котором все коэффициенты левой части равны нулю, а свободный член отличен от нуля, то такая система несовместна.

Если получим систему ступенчатого вида, то система совместна и неопределенна, то есть

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1k}x_k + \ldots + c_{1n}x_n = B_1 \\ \qquad x_2 + \ldots + c_{2k}x_k + \ldots + c_{2n}x_n = B_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_k + \ldots + c_{kn}x_n = B_k \end{cases} \qquad (k < n)$$

Если система получится треугольного вида, то она является совместной и определенной, то есть вида

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1k}x_k + \ldots + c_{1n}x_n = B_1 \\ \qquad x_2 + \ldots + c_{2k}x_k + \ldots + c_{2n}x_n = B_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_k + \ldots + c_{kn}x_n = B_k \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad x_n = B_n \end{cases}$$

<u>Обратный ход.</u>

Ступенчатая система уравнений, вообще говоря, имеет бесчисленное множество решений.

Придавая неизвестным $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$, которые называются свободными, произвольные значения, получим треугольную систему, из которой последовательно найдем все остальные неизвестные $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_1$.

В случае треугольной системы из последнего уравнения находим $x_n = B_n$, затем, подставляя значение $x_n$ в предыдущее уравнение, находим $x_{n-1}$ и т.д.

Замечание. На практике удобнее работать не с системой уравнений, а с ее расширенной матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками.

*Пример 2.4.* Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Решение.

Произведем элементарные преобразования над строками расширенной матрицы системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{vmatrix} \text{I строка}\cdot(-2)+\text{II строка} \\ \text{I строка}\cdot(-3)+\text{III строка} \\ \text{I строка}\cdot(-5)+\text{IV строка} \end{vmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{vmatrix} \text{III строка}:(-2) \\ \text{IV строка}:(-6) \end{vmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \left|\text{III строка}\cdot(-1)+\text{IV строка}\right| \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left|\text{II строка}\cdot(-1)+\text{III строка}\right| \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Осуществляя обратный ход, находим $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$.

## 2.5 Системы линейных однородных уравнений

Система линейных уравнений называется однородной, если все свободные члены этой системы равны нулю.

Рассмотрим систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Система линейных однородных уравнений всегда совместна, так как она имеет, по крайней мере, нулевое (тривиальное) решение

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Теорема 1. Для того, чтобы система линейных однородных уравнений имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее основной матрицы $r$ был меньше числа $n$ неизвестных, то есть $r < n$.

Теорема 2. Для того, чтобы однородная система $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель $\Delta$ был равен нулю, то есть $\Delta = 0$.

Таким образом, если определитель системы $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное, нулевое решение. Если $\Delta = 0$, то система имеет бесконечное множество (ненулевых) решений.

*Пример 2.5.* Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0, \\ 5x - y + 2z = 0, \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$$

Решение.

Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 8 + 5 + 2 + 10 - 2 = 24.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то данная система имеет только одно нулевое решение

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

*Пример 2.6.* Решить систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 0, \\ x - y + 4z = 0, \\ 5x + 2y + 10z = 0. \end{cases}$$

Решение.

Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 10 \end{vmatrix} = -30 + 80 + 4 + 10 - 40 - 24 = 0.$$

Так как $\Delta = 0$, то данная система имеет бесконечное множество решений.

Заметим, что третье уравнение является следствием первых двух, так как оно получается прибавлением к первому уравнению удвоенного второго. Поэтому третье уравнение можно из системы исключить.

Получаем однородную систему двух уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 3x+4y+2z=0, \\ x-y+4z=0. \end{cases}$$

Пусть $z=t$, тогда

$$\begin{cases} 3x+4y=-2t, \\ x-y=-4t. \end{cases}$$

Отсюда $x=-\frac{18}{7}t$, $y=\frac{10}{7}t$.

Следовательно, решение системы можно записать в виде

$$x=-\frac{18}{7}t,\ y=\frac{10}{7}t,\ z=t,$$

где $t$ – произвольное число.

## 2.6 Контрольные вопросы

1. Дайте определение системы линейных алгебраических уравнений.
2. Что называется решением системы?
3. Какая матрица называется основной матрицей системы, расширенной?
4. Какая система линейных алгебраических уравнений называется совместной, несовместной?
5. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.
6. Сформулируйте правило Крамера решения систем линейных уравнений.
7. Сформулируйте матричный метод решения систем линейных уравнений.
8. В чем состоит метод Гаусса? Сформулируйте схему его применения.
9. Какая система линейных алгебраических уравнений называется однородной, неоднородной?
10. Когда система линейных алгебраических уравнений имеет ненулевые решения?