8.5 Гиперболалық теңдеу

8.5.1 Толқындық теңдеу.

Айқын схема. Аз ішекті ауытқуға қатысты f(x, t) ұзындығына қатысты есептерді қарастырамыз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T; \tag{31}$$

мұнда u(x,t) – ізделіп отырған функция, t уақыт аралығындағы x координатасы бойынша сипатталатын ішек ауытқуының нүктесі.

(34) теңдеуі бастапқы шарттармен қосымшаланады:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad 0 < x < 1 \tag{32}$$

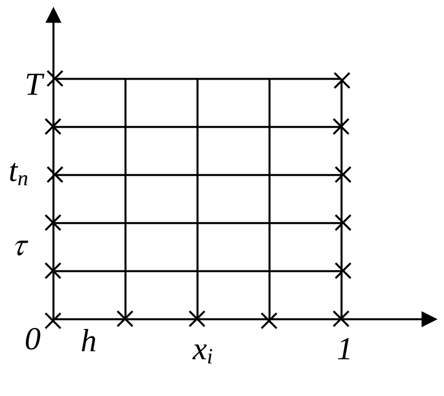
Сонымен қатар параметрлік шарттармен

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(1,t) = \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T \tag{33}$$

(32) шартының физикалық мағынасы былай қорытындылады: t=0 бастапқы уақыт аралығында x координатасының әрбір нүктесінде u(x) теңдік күйінің ауытқуымен белгілі және $u_t(x)$ осы ауытқудың жылдамдығымен өзгереді. (33) шарты ішектің соңы $\mu_1(t)$ - сол жақ соңы, немесе $\mu_2(t)$ - оң жақ соңы заңы бойынша қозғалуы керек екенін білдіреді.

Әдеттегідей, торды $x : \omega_h = \{x_i = ih,\ i = 0,1,\dots,N,\ hN = 1\}$ айнымалыларымен толтырамыз және торды t айнымалысының τ қадамымен белгілейміз $\omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0,1,\dots,K,\ \tau K = T\}$.

$(x_i, t_n),\ i = 0,1,\dots,N,\ n = 0,1,\dots,K$ нүктелері кеңістік уақыт торының түйінімен құрастырылады $\omega_{h,\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$, сурет 4.



Сурет 4. Кеңістік уақыт торы.

y(x,t) функциясы $\omega_{h,\tau}$ торында анықталған, $y_i^n = y(x_i, t_n)$ белгілеу енгіземіз.

(31) қарапайым айырым аппроксимациясының теңдеуі және (33) шарты келесі жүйе теңдеуі болып табылады:

$$\frac{y_i^{n+1} - 2y_i^n + y_i^{n-1}}{\tau^2} = c^2 \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} + f_i^n, \quad (34)$$
$$i = 1,2,\dots,N-1, \quad n = 1,2,\dots,K-1$$

$$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), \quad y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}), \quad n = 0,1,\dots,K-1 \qquad (35)$$

(34) айырым теңдеуі екінші ретті қателік аппроксимациясы τ және h бойынша сипатталды.

y_i^{n+1} шешу айқын түрдегі мәндер арқылы алдыңғы қабаттарда көрсетіледі:

$$y_i^{n+1} = 2y_i^n - y_i^{n-1} + \gamma(y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n) + \tau^2 f_i^n, \quad i = 1,2,\dots,N-1,$$
$$\gamma = \frac{c^2\tau^2}{h^2}, \quad n = 1,2,\dots,K-1 \qquad (36)$$

Нөлінші қабатта бастапқы шарттан белгілі шешім қолданылады (32):

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 1,\dots,N-1 \qquad (37)$$

Егер (32) бастапқы шартын екінші айырым аппроксимациясымен алмастырсақ,

$$\frac{y_i^1 - y_i^0}{\tau} \approx u_t(x_i,0) = u_1(x_i), \quad i = 1,\dots,N-1 \qquad (38)$$

онда τ бойынша бірінші аппроксимацияны аламыз. (34) теңдеуі (31) теңдеуін екінші ретте аппроксимациялайды, бастапқы айырым шарты сол сияқты екінші ретпен аппроксимациялануы керек. Ол үшін Тейлор формуласын t=0 нүктесінің аралығында u(x,t) функциясымен қолданылады.

$$\frac{u(x,\tau) - u(x,0)}{\tau} = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial t^2} + O(\tau^2)$$

және (31) теңдеуінің күшінде теңдік орындалатынын есте сақтайық

$$\frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial x^2} + f(x,0) = c^2 u_0''(x) + f(x,0), \quad 0 < x < 1.$$

Осылайша,

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \frac{u(x,\tau) - u(x,0)}{\tau} - \frac{\tau}{2}(c^2 u_0''(x) + f(x,0)) + O(\tau^2)$$

айырым теңдеуі

$$\frac{y_i^1 - y_i^0}{\tau} = u_1(x_i) + \frac{\tau}{2}(c^2 u_0''(x_i) + f(x_i,0)), \quad i = 1,\dots,N-1 \tag{39}$$

(32) шартынан екінші ретте τ және h бойынша аппроксимациялайды.

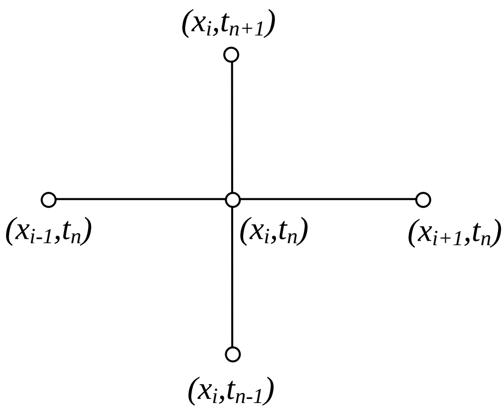
Осылайша, (31)-(33) есептері үшін келесідей айқын айырым схемасын алдық:

$$\begin{aligned}
&y_i^{n+1} = 2y_i^n - y_i^{n-1} + \gamma(y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n) + \tau^2 f_i^n, \\
&i = 1,2,\dots,N-1, \quad n = 1,2,\dots,K-1 \\
&y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), \quad y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}), \\
&n = 0,1,\dots,K-1 \\
&y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 1,\dots,N-1 \\
&y_i^1 = y_i^0 + \tau u_1(x_i) + \frac{\tau^2}{2}(c^2 u_0''(x_i) + f(x_i,0)), \quad i = 1,\dots,N-1
\end{aligned} \tag{40}$$

τ және h бойынша олар екінші ретте аппроксимацияланады. Ол Куранта шартын орындау тұрақтылығы болып табылады:

$$c\tau < h \tag{41}$$

(40) схемасы «крест» схемасы деп аталады, себебі ол бес мәнді шаблонды қабылдайды және ол өзінің формасымен крестті еске түсіреді, сурет 5.



Сурет 5. Крест схемасы.

8.5.2 Айқын емес схема.

(31)-(33) есептері үшін айқын емес схема құрамыз. Сурет 6-дағы суреттегіі шаблонды қарасақ және осыған сәйкес кеңістіктегі әр түрлі туынды қабаттардан схема құрамыз:

$$\frac{y_i^{n+1} - 2y_i^n + y_i^{n-1}}{\tau^2} = c^2\sigma \frac{y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}}{h^2} +$$

$$c^2(1-2\sigma)\frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} + +c^2\sigma\frac{y_{i+1}^{n-1} - 2y_i^{n-1} + y_{i-1}^{n-1}}{h^2} + f_i^n \qquad (42)$$

$$i = 1,2,\dots,N-1, \quad n = 1,2,\dots,K-1$$

Барлық салмақтар теріс емес, сондықтан $0 \le \sigma \le \frac{1}{2}$ алу керек.

Шекаралық түйіндерді шешуде (33) шарты бойынша келесі формула арқылы анықталады

$$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), \quad y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}), \quad n = 0,1,\dots,K-1 \qquad (43)$$

Нөлінші және бірінші қабаттарды шешу мәндері айқын схемада шешілген сияқты (37) және (39) формулалары арқылы өрнектеледі:

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 1,\dots,N-1$$
$$y_i^1 = y_i^0 + \tau u_1(x_i) + \frac{\tau^2}{2}(c^2 u_0''(x_i) + f(x_i,0)), \quad i = 1,\dots,N-1 \qquad (47)$$

Схеманың (40) қалған қабаттарында (41) шарты бойынша y_i^{n+1}-ке қатысты сызықты жүйе теңдеуін үш диагоналды матрица арқылы құрастырады, мұнда диагоналды элементтер басым болады; бұл жүйені шешу жалғыз және қулау әдісімен есептеледі.

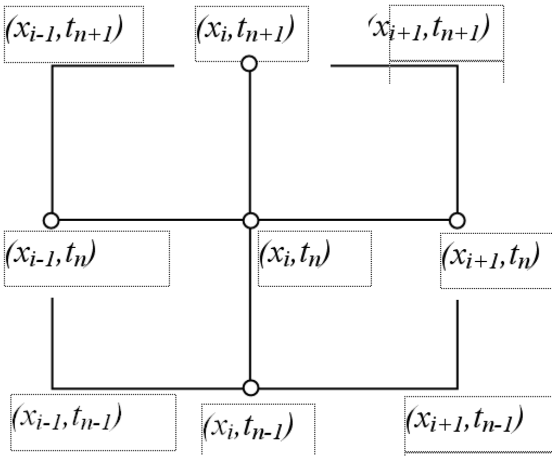
Тейлора формуласымен шешу орнатылған, оларды шешу (40)-(42) үздіксіз ширек туындысының схемасымен (31)-(33) теңдеуімен $O(\tau^2 + h^2)$ кез келген σ бойынша аппроксимацияланады.

Тұрақтылық схемасының шарты келесі теңсіздікке ие:

$$\left(\frac{c\tau}{h}\right)^2 (1 - 4\sigma) \le 1 \qquad (45)$$

(45) теңсіздігінен көрінгендей, $\sigma \ge 1/4$ бойынша (40) схемасы сөзсіз орнықты болып келеді. Егер $\sigma < 1/4$ болса, онда схема $c\tau \le h(1-4\sigma)^{-1/2}$ тбойынша шартты орнықты болып табылады.

Осылайша, салмақты таңдау кезінде $1/4 \le \sigma \le 1/2$ (40) айқын емес схемасы сөзсіз $O(\tau^2 + h^2)$ сәйкес келеді.



Сурет 6. Айқын емес схемасының шаблоны.

3 мысал

Ішекті ауытқуындағы теңдеулер үшін айқын емес схеманы пайдаланып араласқан есепті шешу.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad 0 \le x \le 1; \quad 0 \le t \le T;$$

$$u(x,0) = u_0(x); \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \bar{u}_0;$$

$$u(0,t) = \mu_1(t); \quad u(1,t) = \mu_2(t);$$

$$u_0(x) = x; \quad \bar{u}_0(x) = 1; \quad \mu_1(t) = t; \quad \mu_2(t) = t+1;$$

Шешуі:

Уақыт бойынша τ=0,1 қадамды торды және h=0,1 қадамды x кеңістіндегі айнымалыны қарастырайық. Ішекті ауытқуындағы теңдеулер уақыт бойынша екінші туындысын қабылдайды және олардағы қабаттар саны үштен аз болмауы керек.

Теңдеуді аппроксимациялауда айқын емес схеманы қолданамыз.

$$\frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\tau^2} = \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2};$$

$$h^2(u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}) = \tau^2(u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1});$$

$$\tau^2 u_{i-1}^{j+1} - u_i^{j+1}(2\tau^2 + h^2) + \tau^2 u_{i+1}^{j+1} = h^2(-2u_i^j + u_i^{j-1});$$

Бастапқы шартты аппроксимациялаймыз.

$$u(x,0) = u_0(x) = x; \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \bar{u}_0 = 1;$$

$$u_i^0 = x_i; \quad \frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} = 1;$$

Параметрлік шартты аппроксимациялаймыз.

$$u(0,t) = \mu_1(t) = t; \; u(1,t) = \mu_2(t) = t + 1;$$

$$u_0^j = t^j; \; u_1^j = t^j + 1;$$

Осылайша, айырым есебі қойылған:

$$\tau^2 u_{i-1}^{j+1} - u_i^{j+1}(2\tau^2 + h^2) + \tau^2 u_{i+1}^{j+1} = h^2(-2u_i^j + u_i^{j-1});$$

$$u_i^0 = x_i; \; \frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} = 1;$$

$$u_0^j = t^j; \; u_1^j = t^j + 1;$$

Бұл есеп қуалау әдісімен шығарылады. Қулаудың сәйкестілік шарты орындалды: $(2\tau^2 + h^2) > 2\tau^2$;

j=0 және j=1 үшін функцияның мәні бастапқы шарттан табылады, а қалған j мәндері мәні қуалау әдісінің көмегімен табылады.

Қуалаудың нәтижесі j=2 үшін келесі 4 кестеде берілген.

4 кесте. Қуалау әдісінің жүзеге асуы.

i	**x_i**	**a_i**	**b_i**	**c_i**	**α_i**	**β_i**	**y_i**	**f_i**
0	0,00	0,01	0,01	0,03			0,20	0,002
1	0,10	0,01	0,01	0,03	0,00	0,20	0,30	0,003
2	0,20	0,01	0,01	0,03	0,33	0,17	0,40	0,004
3	0,30	0,01	0,01	0,03	0,38	0,21	0,50	0,005
4	0,40	0,01	0,01	0,03	0,38	0,27	0,60	0,006
5	0,50	0,01	0,01	0,03	0,38	0,33	0,70	0,007
6	0,60	0,01	0,01	0,03	0,38	0,39	0,80	0,008
7	0,70	0,01	0,01	0,03	0,38	0,46	0,90	0,009
8	0,80	0,01	0,01	0,03	0,38	0,52	1,00	0,01
9	0,90	0,01	0,01	0,03	0,38	0,58	1,10	0,011
10	1,00	0,01	0,01	0,03	0,38	0,64	1,20	0,012

Нәтижесі келесі 5 кестеде көрсетілген.

5 кесте. Есептеудің нәтижесі.

10	1	1	1,09	1,19	1,28	1,38	1,49	1,59	1,7	1,8	1,9	2
9	0,9	0,90	0,99	1,09	1,18	1,28	1,38	1,49	1,60	1,70	1,80	1,90
8	0,8	0,80	0,90	0,99	1,09	1,18	1,28	1,38	1,49	1,60	1,70	1,80
7	0,7	0,70	0,80	0,90	0,99	1,09	1,18	1,27	1,38	1,49	1,60	1,70
6	0,6	0,60	0,70	0,80	0,90	0,99	1,09	1,18	1,27	1,38	1,49	1,60
5	0,5	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,99	1,08	1,17	1,26	1,37	1,50
4	0,4	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,09	1,14	1,26	1,40
3	0,3	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,01	1,03	1,18	1,30

2	0,2	0,2	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,10	1,20
1	0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	1,1
0	0	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
	t/x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
j/i		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10