7 ҚАРАПАЙЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ШЕКТІК ЕСЕПТЕРДІ ЖУЫҚТАП ШЕШУ

7.1 Шекті-айырымдық әдіс

Екінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеу берілсін:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad (1)$$

x - тәуелсіз айнымалы, $x \in [a, b]$ - аралығында (1) теңдеуді және осы аралықтың екі шеткі нүктелерінде шекаралық шарттарын қанағаттандыратын y=y(x) шешімін табу керек:

$$\varphi_1[y(a), y'(a)] = 0$$
$$\varphi_2[y(b), y'(b)] = 0 \qquad (2)$$

Біз осыған дейінгі есептерде Коши есебі деп дифференциалдық теңдеуге қосымша функцияның бір тәуелсіз айнымалыдағы мәні берілген жағдайды айтып жүрдік. Ал функцияның екі тәуелсіз айнымалыдағы мәндері берілсе, есепті қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін шектік есеп деп айтады.

(1) теңдеу және (2) шекаралық шарттар сызықтық болған жағдайды қарастырамыз:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \qquad (3)$$

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A$$
$$\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \qquad (4)$$

$p(x),\ q(x),\ f(x)$ - $[a, b]$ аралықтағы белгілі функциялар, $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, A, B$ - анықталған тұрақтылар, және $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0,\ |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0$.

$[a, b]$ аралығында тор енгіземіз:

$$x_0 = a,\ x_n = b,\ x_i = x_0 + ih,\ i = 1,2,.., n-1,$$

және келесі белгілеме енгіземіз:

$$p_i = p(x_i); \quad q_i = q(x_i); \quad f_i = f(x_i).$$

(3) дифференциалдық теңдеудегі және (4) шекаралық шарттарындағы туындыларды шекті-айырымды қатынастармен алмастырамыз. Орталық-айырымдық қатынастар қолданамыз. Дифференциалдық теңдеу келесі түрге келтіріледі:

$$y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}; \quad y_i'' \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}; \quad (5)$$

$$y_0' \approx \frac{y_1 - y_0}{h}; \quad y_n' \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \quad (6)$$

Осы формулаларды қолданып (3) (4) теңдеулерді келесі жүйеге алмастырамыз:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i; \quad i = 1,2,\ldots, n-1 \\ \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{y_1 - y_0}{h} = A; \quad \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = B \end{array}\right\} \quad (7)$$

(7) жүйе - n+1 сызықтық теңдеулерден тұратын n+1 $y_i, \quad i = 0,1,2,\ldots, n$ белгісіздері бар жүйе. $y_i, \quad i = 0,1,2,\ldots, n$ дискретті функция $y(x)$ функцияны жуықтайды.

Түйінділер саны көп болған жағдайда (7) жүйені сызықтық теңдеулер жүйелерін шешуге арналған әдістерді қолданған тиімді емес, себебі (7) жүйенің үш диагональдағі элементтерінен басқа элементтерінің бәрі нөл. Осындай жүйелер матрицасы үшдиагоналды матрица деп аталады:

$$\begin{pmatrix} \times & \times & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ \ldots. & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & \ldots\ldots\ldots\ \ldots. & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & \times & \ldots\ldots\ldots\ \ldots. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & \ldots\ldots\ldots\ \ldots. & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots. & \ldots\ldots\ldots\ \ldots & \ldots. & \ldots. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ .. & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ .. & \times & \times \end{pmatrix}$$

Осындай жүйелерді куалау әдісімен шешу тиімді.

Мысал 1

Екінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеу берілсін:

$$y'' + xy' - \frac{y}{x} = 1{,}5,$$

x - айнымалы, $x \in [2; 2{,}3]$ аралығында жоғарыдағы теңдеуді және осы аралықтың екі шеткі нүктелерінде шекаралық шарттарын қанағаттандыратын y=y(x) шешімін табу керек:

$$\begin{array}{l} y(2) - 2y'(2) = 1 \\ y(2{,}3) + y'(2{,}3) = 2{,}15 \end{array}.$$

Шекті-айырымдық әдісті қолданып берілген шектік есептің шешімін табу, $\varepsilon = 10^{-3}$ және h=0,1.

Шешім:

$\omega_h = \{x_i = x_0 + ih,\ i = 1,2,..,\ n-1;\quad x_0 = 2,\quad x_n = 2,3\}$ - тор енгіземіз.

Егер $h = 0,1$, онда $n = \dfrac{b-a}{h} = \dfrac{2,3-2}{0,1} = 3$.

$y_i = y(x_i)$ белгілеу енгіземіз, және дифференциалдық теңдеудегі туындыларды шекті-айырымды қатынастармен алмастырамыз. Орталық-айырымдық қатынастар қолданамыз. Дифференциалдық теңдеу келесі түрге келтіріледі:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - \frac{y_i}{x_i} = 1,5;\quad i = 1,2$$

Шекаралық шарттар келесідей жазылады:

$$\begin{cases} y_0 - 2y_0' = 1 \\ y_3 + y'_3 = 2,15 \end{cases}$$

y_0', y_2' туындыларды шекті-айырымды қатынастармен алмастырамыз:

$$y_0{}' \approx \frac{y_1 - y_0}{h};\ y_3{}' \approx \frac{y_3 - y_2}{h}.$$

Яғни, теңдеудің шекаралық шарттар келесідей жазылады:

$$\begin{cases} y_0 - 2\dfrac{y_1 - y_0}{h} = 1 \\ y_3 + \dfrac{y_3 - y_2}{h} = 2,15 \end{cases}.$$

Сонымен y_0, y_1, y_2, y_3 табуға арналған келесі жүйе құрылды:

$$\begin{cases} y_0 - 2\dfrac{y_1 - y_0}{h} = 1; \\ \dfrac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + x_1\dfrac{y_2 - y_0}{2h} - \dfrac{y_1}{x_1} = 1,5; \\ \dfrac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2} + x_2\dfrac{y_3 - y_1}{2h} - \dfrac{y_2}{x_2} = 1,5 \\ y_3 + \dfrac{y_3 - y_2}{h} = 2,15; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 - 2\dfrac{y_1 - y_0}{0,1} = 1; \\ \dfrac{y_2 - 2y_1 + y_0}{0,01} + 2,1\dfrac{y_2 - y_0}{0,2} - \dfrac{y_1}{2,1} = 1,5; \\ \dfrac{y_3 - 2y_2 + y_1}{0,01} + 2,2\dfrac{y_3 - y_1}{0,2} - \dfrac{y_2}{2,2} = 1,5; \\ y_3 + \dfrac{y_3 - y_2}{0,1} = 2,15; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2{,}1y_0 - 2y_1 = 0{,}1; \\ 89{,}5y_0 - 200{,}476\ y_1 + 110{,}5y_2 = 1{,}5; \\ 89\ y_1 - 200{,}455\ y_2 + 111\ y_3 = 1{,}5; \\ -y_2 + 1{,}1y_3 = 0{,}215\ ; \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2{,}1 & -2 & 0 & 0 \\ 89{,}5 & -200{,}476 & 110{,}5 & 0 \\ 0 & 89 & -200{,}455 & 111 \\ 0 & 0 & -1 & 1{,}1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ 0{,}215 \end{pmatrix}.$$

Сызықтық теңдеулер жүйесі Гаусс әдісімен шешіледі, 1-кесте.

1-кесте. Гаусс әдісімен жүйені шешу.

x_0-дің коэффициенті	x_1-дің коэффициенті	x_2-нің коэффициенті	x_4-тің коэффициенті	Бос мүше
2,1	-2	0	0	0,1
89,5	-200,76	110,5	0	1,5
0	89	-200,55	111	1,5
0	0	-1	1,1	0,215
1,000	-0,952	0	0	0,048
	-115,522	110,500	0	-2,762
	89,000	-200,550	111,000	1,500
	0	-1,000	1,100	0,215
	1,000	-0,957	0	0,024
		-115,419	111,000	-0,628
		-1,000	1,100	0,215
		1,000	-0,962	0,005
			0,138	0,220
			1,000	1,594

Нәтиже:
$x_{0=}1{,}472$ $x_{1=}1{,}496$ $x_{2=}1{,}538$ $x_{3=}1{,}594$

Мысал 2

Екінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеу берілсін:

$$y'' + xy' - 0{,}5\frac{y}{x} = 1,$$

x - айнымалы, $x \in [2;2{,}3]$ аралығында жоғарыдағы теңдеуді және осы аралықтың екі шеткі нүктелерінде шекаралық шарттарын қанағаттандыратын y=y(x) шешімін табу керек:

$$y(2) + 2y'(2) = 1$$
$$y(2,3) = 2,15 .$$

Қуалау әдісін қолданып берілген шектік есептің шешімін табу, $\varepsilon = 10^{-3}$ және h=0,01.

Шешім:

$\omega_h = \{x_i = x_0 + ih,\ i = 1,2,.., n-1;\quad x_0 = 2,\quad x_n = 2,3\}$ тор енгізейік. Егер $h = 0,05$ деп алсақ онда $n = \dfrac{b-a}{h} = \dfrac{2,3-2}{0,05} = 6$.

$y_i = y(x_i)$ белгілейміз және дифференциалдық теңдеудегі туындыларды шекті-айырымды қатынастармен алмастырамыз. Орталық-айырымдық қатынастар қолданамыз. Дифференциалдық теңдеу келесі түрге келтіріледі:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - 0,5\frac{y_i}{x_i} = 1;\quad i = 1,2,..., n-1$$

Ұқсас мүшелерін жинақтау арқылы:

$$y_{i-1}\left(\frac{1}{h^2} - \frac{x_i}{2h}\right) - y_i\left(\frac{2}{h^2} + \frac{0,5}{x_i}\right) + y_{i+1}\left(\frac{1}{h^2} + \frac{x_i}{2h}\right) = 1 .$$

Теңдеудің екі жағын да h^2 көбейтеміз:

$$y_{i-1}(1 - 0,5hx_i) - y_i\left(2 + \frac{0,5h^2}{x_i}\right) + y_{i+1}(1 + 0,5hx_i) = h^2 .$$

Шекаралық шарттар келесідей жазылады:

$$\begin{cases} y_0 + 2y_0' = 1 \\ y_n = 2,15 \end{cases}.$$

y_0' туындыны шекті-айырымды қатынастармен алмастырамыз:

$$y_0' \approx \frac{y_1 - y_0}{h}.$$

Яғни, теңдеудің шекаралық шарттар келесідей жазылады:

$$\begin{cases} y_0 + 2\dfrac{y_1 - y_0}{h} = 1 \\ y_n = 2,15 \end{cases}.$$

Ұқсас мүшелерін жинақтау арқылы:

$$y_0\frac{h-2}{h}+y_1\frac{2}{h}=1,\ y_0(h-2)+2y_1=h,\ y_0=\frac{2}{2-h}y_1+\frac{h}{h-2}.$$

Сонымен y_i табуға арналған келесі жүйе құрылды:

$$\begin{cases} y_{i-1}(1-0{,}5hx_i)-y_i(2+\dfrac{0{,}5h^2}{x_i})+y_{i+1}(1+0{,}5hx_i)=h^2, & i=1,2,...,\ n-1 \\ y_0=\dfrac{2}{2-h}y_1+\dfrac{h}{h-2} \\ y_n=0y_{n-1}+2{,}15 \end{cases}.$$

Осы жүйе - n+1 сызықтық теңдеулерден тұратын n+1 $y_i,\quad i=0,1,2,...,\ n$ белгісіздері бар жүйе. $y_i,\quad i=0,1,2,...,\ n$ дискретті функция $y(x)$ функцияны жұықтайды. Осындай жүйелерді қуалау әдісімен шешу тиімді.

Берілген есеп үшін:

$$\left.\begin{array}{l} a_i=(1-0{,}5hx_i);\quad b_i=(1+0{,}5hx_i);\quad c_i=2+\dfrac{0{,}5h^2}{x_i};\quad f_i=-h^2,\quad i=1,2,...,\ n-1 \\ \nu_1=\dfrac{2}{2-h},\quad \mu_1=\dfrac{h}{h-2},\quad \nu_2=0,\quad \mu_2=2{,}15 \end{array}\right\}$$

Қуалау әдісінің жинақтылық шарты орындалады:

$$a_i\neq 0,\quad b_i\neq 0,\quad |c_i|\geq|a_i|+|b_i|,\quad |\nu_1|\leq 1,\quad |\nu_2|<1$$

Тура қуалау: Алдымен α_i,β_i коэффициенттерін есептеп табамыз:

$$\begin{array}{l} \alpha_1=\nu_1=\dfrac{2}{2-h},\quad \alpha_{i+1}=\dfrac{b_i}{c_i-\alpha_i a_i},\quad i=1,2,....,\ n-1 \\ \beta_1=\mu_1=\dfrac{h}{h-2},\quad \beta_{i+1}=\dfrac{a_i\beta_i+f_i}{c_i-\alpha_i a_i},\quad i=1,2,....,\ n-1 \end{array}.$$

Осы формулалардың көмегімен $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,.....,\ \alpha_n;\quad \beta_2,\beta_3,\beta_4,.....,\ \beta_n;$ есептеледі.

Кері қуалау:

Алдымен y_n есептейміз $y_n=\dfrac{\nu_2\beta_n+\mu_2}{1-\nu_2\alpha_n}=2{,}15$, одан кейін функцияның қалған $y_{n-1},y_{n-2},y_{n-3},....,\ y_1,y_0$ мәндері табылады:

$$y_i=\alpha_{i+1}y_{i+1}+\beta_{i+1},\quad i=n-1,n-2,.....,\ 1,0.$$

Сонымен:

$a_i = 2;\ b_i = 2,3;\ c_i = 2;\ \ h = 0,01;\ n = \frac{(b - a)}{h} = 30;\ \nu_1 = 1,005025\ \ ;\ \nu_2 = 0;$

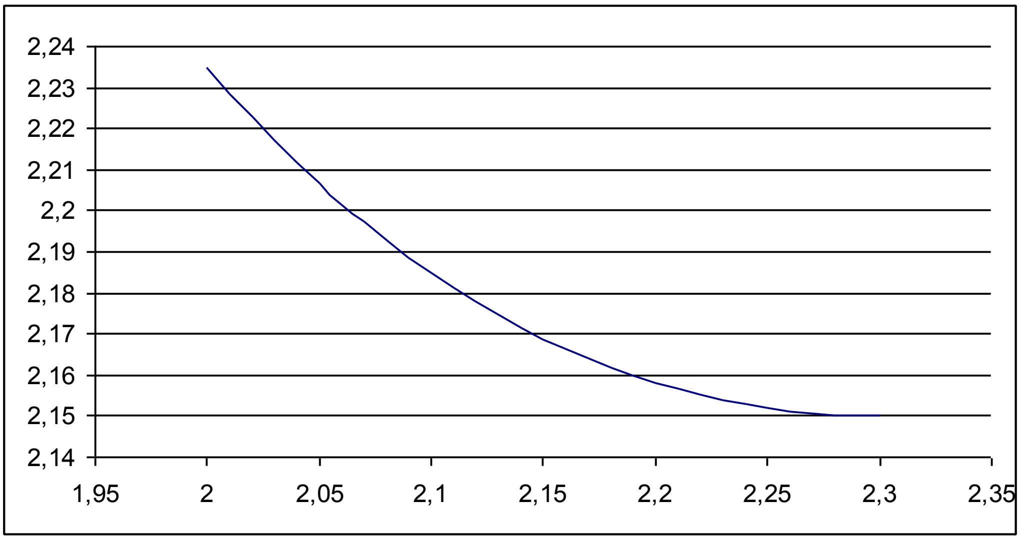
$\mu_1 = -0,00503\ \ ;\ \mu_2 = 2,15;\ f_i = -0,0001\ .$

Есепті шешу қадамдары 2-кестеде көрсетілген.

2- кесте. Қуалау әдісімен есепті шешу.

	x_i	a_i	b_i	c_i	$alpha_i$	$beta_i$	y_i
0	2,0000	0,9900	1,0100	2,0000			2,2348
1	2,0100	0,9900	1,0101	2,0000	1,0050	-0,0050	2,2286
2	2,0200	0,9899	1,0101	2,0000	1,0049	-0,0050	2,2228
3	2,0300	0,9899	1,0102	2,0000	1,0048	-0,0051	2,2171
4	2,0400	0,9898	1,0102	2,0000	1,0047	-0,0051	2,2118
5	2,0500	0,9898	1,0103	2,0000	1,0046	-0,0051	2,2067
6	2,0600	0,9897	1,0103	2,0000	1,0045	-0,0051	2,2018
7	2,0700	0,9897	1,0104	2,0000	1,0044	-0,0051	2,1972
8	2,0800	0,9896	1,0104	2,0000	1,0043	-0,0052	2,1929
9	2,0900	0,9896	1,0105	2,0000	1,0042	-0,0052	2,1888
10	2,1000	0,9895	1,0105	2,0000	1,0041	-0,0052	2,1849
11	2,1100	0,9895	1,0106	2,0000	1,0041	-0,0052	2,1813
12	2,1200	0,9894	1,0106	2,0000	1,0040	-0,0052	2,1779
13	2,1300	0,9894	1,0107	2,0000	1,0039	-0,0052	2,1747
14	2,1400	0,9893	1,0107	2,0000	1,0038	-0,0052	2,1717
15	2,1500	0,9893	1,0108	2,0000	1,0037	-0,0052	2,1689
16	2,1600	0,9892	1,0108	2,0000	1,0036	-0,0052	2,1664
17	2,1700	0,9892	1,0109	2,0000	1,0035	-0,0053	2,1640
18	2,1800	0,9891	1,0109	2,0000	1,0034	-0,0053	2,1619
19	2,1900	0,9891	1,0110	2,0000	1,0033	-0,0053	2,1599
20	2,2000	0,9890	1,0110	2,0000	1,0033	-0,0053	2,1581
21	2,2100	0,9890	1,0111	2,0000	1,0032	-0,0053	2,1565
22	2,2200	0,9889	1,0111	2,0000	1,0031	-0,0053	2,1551
23	2,2300	0,9889	1,0112	2,0000	1,0030	-0,0053	2,1539
24	2,2400	0,9888	1,0112	2,0000	1,0029	-0,0053	2,1529
25	2,2500	0,9888	1,0113	2,0000	1,0029	-0,0053	2,1520
26	2,2600	0,9887	1,0113	2,0000	1,0028	-0,0053	2,1513
27	2,2700	0,9887	1,0114	2,0000	1,0027	-0,0052	2,1507
28	2,2800	0,9886	1,0114	2,0000	1,0026	-0,0052	2,1503
29	2,2900	0,9886	1,0115	2,0000	1,0025	-0,0052	2,1501
30	2,3000	0,9885	1,0115	2,0000	1,0025	-0,0052	2,1500

Есептелген функцияның графигі 1-суретте көрсетілген. у функция қойылган шектік есебінің шешімі.



1 -сүрет. Функцияның графигі.