6 ҚАРАПАЙЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР. КОШИ ЕСЕБІНІҢ ШЕШУ ӘДІСТЕРІ

6.1 Коши есебі

Коши есебі: қарапайым дифференциалдық теңдеуге қатысты негізгі есеп бастапқы шартты (1) қанағаттандыратын u=u(t) түріндегі шешімін табу - Коши есебі.

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = f(t,u), \quad t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

(1) есептің оң жағындағы $f(t,u)$ функция белгілі шарттарды қанағаттандырса (қанағатандырады деп санаймыз) онда Коши есебінің шешімі бар және сол шешімі жалғыз.

t айнымалының өзгеру аралығында $\tau > 0$ тұрақты қадамы бар тор енгіземіз, яғни $\omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = 0,1,2,\dots\}$ нүктелер жиынын қарастырамыз.

$u(t)$ белгісіз функцияның t^* нүктедегі мәнін табу керек. Ол үшін $[t_0, t^*]$ аралықты $t_0, t_1, \dots, t_n = t^*$ түйындермен n аралыққа бөлеміз.

Жуықтап табу формулалары қолданылып $u_1 = u(t_1),\ u_2(t_2),\dots,u_n(t_2)$ функция мәндері табылады.

Жуықтап табу $u_i = u(t_i)$ формулаларының көбі келесі принциппен табылады. (1) теңдеуді дифференциал түрінде жазып $du = f(t,u)dt$ t_{i-1} және t_i аралығында интегралдасақ:

$$u_i = u_{i-1} + \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(t,u)dt = u_{i-1} + \Delta u_{i-1}. \tag{2}$$

Көптеген әдістердің негізінде осы формула жатыр. Әдістердің бір бірінен айырмашылығы функция өсімшесін (3) табу әдісіне байланысты.

$$\Delta u_{i-1} = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(t,u)dt \quad . \tag{3}$$

6.2 Эйлера әдісі, қайта есептеу Эйлер (Эйлер-Коши) әдісі

Эйлер әдісінде функция өсімшесін тапқанда интеграл солжақты ушбұрыш формуласыменен табылады:

$$\Delta u_{i-1} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t,u)dt \approx \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t_{i-1}, u_{i-1})dt = \tau f(t_{i-1}, u_{i-1}) \qquad (4)$$

(2) теңдеу келесі түрде жазылады:

$$\begin{aligned} & y_i = y_{i-1} + \tau \cdot f(t_{i-1}, y_{i-1}), \quad i = 0,1,2,\dots, \\ & y_0 = u_0 \end{aligned} . \qquad (5)$$

бір қадам аралығында (4), (5) формулалар қателігі:

$$R_n = \frac{h^2}{2} f''(c), \;\; c \in (t_{i-1}, t_i),\;\; h = t_i - t_{i-1} . \qquad (6)$$

Бір қадам аралығында әдіс қателігі h^2 -ретті.

Қайта есептеу Эйлер (Эйлер-Коши) әдісінің негізгі идеясы келесіде: біріншіден Эйлер формуласыменен нөлдік жұықтау табылады:

$$y_i^{(0)} = y_{i-1} + \tau \cdot f(t_{i-1}, y_{i-1}) . \qquad (7)$$

Одан кейін $\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t,u)dt$ интеграл трапеция формусамын есептеледі. Яғни, y_i жуықтап табу формуласы келесі түрде табылады:

$$y_i^{(k)} = y_{i-1} + \frac{h}{2}\left[f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, y_i^{(k-1)}) \right]. \qquad (7^*)$$

(7*) формуланың көмегімен функция мәнінің k нөмерлі итерациялық мәні табылады. Итерация $\left| y_i^{(n)} - y_i^{(n-1)} \right| \le \varepsilon$, ε -кішкентай сан, шарт орындалғанша есептеледі.

Бір қадам аралығында әдіс қателігі h^3 -ретті.

Мысал 1

Есептгегенде 3-дұрыс цифрлар қолдана отырып Коши есебін Эйлер әдісімен шеш, h=0,125:

$$y' = y\left(\frac{1}{2x} - 1\right); \;\; x \in [1;\, 1{,}5];$$

$$y(1) = 2{,}70 ;$$

Шешім:

Берілгеніне сәйкес x_0=1, y_0=2,70.

$$y'_0 = 2{,}70 * \left(\frac{1}{2*1} - 1\right) = -1{,}35 ;$$

(4) формула, $\Delta u_0 = 0{,}125 * (-1{,}35) = -0{,}169$.

Сонымен (5) формула бойынша y_1=2,70-0,169=2,53.

Арғарай итерация жалғаса береді. Бастапқы мән ретінде x_1, y_1, келесі итерацияда x_2, y_2 және т.б. алынады. Есептеу нәтижесі 1-кестеде келтірілген.

1-кесте. Эйлер әдісімен есептеу

i	x_i	y_i	y'_i	Δy_i
0	1,000	2,70	-1,35	-0,169
1	1,125	2,53	-1,41	-0,176
2	1,250	2,36	-1,41	-0,176
3	1,375	2,18	-1,38	-0,172
4	1,500	2,01		

Мысал 2

Есептгегенде 3-дұрыс цифрлар қолдана отырып Коши есебін Эйлер-Коши әдісімен шеш:

$$y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{10}};\ x \in [0{,}6;1{,}6];$$

$$y_0(0{,}6) = 0{,}8;$$

Шешім:

Эйлер формуласымен $y_1^0 = y_0 + \tau \cdot f(t_0, y_0) = 0{,}8 + 0{,}1*(0{,}6 + \sin\frac{0{,}8}{\sqrt{10}}) = 0{,}885$

табамыз.

Нөлдік жуықтау табылды, енді 1-інші жуықтауды (итерацияны) табамыз:

$$y_1^{(1)} = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(0)})\right] =$$

$$= 0{,}8 + \frac{0{,}1}{2}\left[(0{,}1*(0{,}6 + \sin\frac{0{,}8}{\sqrt{10}}) + 0{,}1*(0{,}7 + \sin\frac{0{,}885}{\sqrt{10}}))\right] = 0{,}891;$$

Екінші итерация:

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(1)})\right] =$$

$$= 0{,}8 + \frac{0{,}1}{2}\left[(0{,}1*(0{,}6 + \sin\frac{0{,}8}{\sqrt{10}}) + 0{,}1*(0{,}7 + \sin\frac{0{,}891}{\sqrt{10}}))\right] = 0{,}891;$$

Бірінші және екінші итерациялардың нәтижесі бір біріне сәйкес, сондықтан есептеу тоқтатылады. Табылған y_1=0,891.

Осылай қалған y_i, i=2…10, анықталады.

Есептеу нәтижесі 2-кестеде келтірілген.

2-кесте. Эйлер-Коши әдісімен есептеу

i	X_i	Y_i	Итерация (k)			
			0	1	2	3
0	0,6	0,8	-	-	-	-
1	0,7	0,891	0,885	0,891	0,891	
2	0,8	0,996	0,989	0,996	0,996	
3	0,9	1,114	1,107	1,113	1,114	1,114
4	1	1,245	1,238	1,245	1,245	
5	1,1	1,390	1,383	1,390	1,390	
6	1,2	1,550	1,543	1,550	1,550	
7	1,3	1,725	1,717	1,725	1,725	
8	1,4	1,914	1,907	1,914	1,914	
9	1,5	2,119	2,111	2,119	2,119	
10	1,6	2,338	2,331	2,338	2,338	

6.3 Рунге-Кутта әдісі

Айқындалған m-қадамды Рунге-Кутта әдісі келесіден тұрады. Коши есебінің $y_i = y(t_i)$ шешімі белгілі деп санайық. Сандық коэффициенттер $a_n, b_{nm},\quad n = 2,3,\ldots,N,\quad m = 1,2,\ldots,M-1,\quad \sigma_n,\quad n = 1,2,\ldots,M$ анықталады және ретімен функциялар есептеледі:

$$\begin{cases} k_1 = f(t_i, y_i), \\ k_2 = f(t_i + a_2\tau, y_i + b_{21}\tau \cdot k_1), \\ k_3 = f(t_i + a_3\tau, y_i + b_{31}\tau \cdot k_1 + b_{32}\tau \cdot k_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots, \\ k_M = f(t_N + a_M\tau, y_N + b_{M1}\tau \cdot k_1 + b_{M2}\tau \cdot k_2 + \ldots + b_{M,M-1}\tau \cdot k_{M-1}). \end{cases} \tag{8}$$

Одан кейін, келесі формуламен:

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{\tau} = \sum_{m=1}^{M} \sigma_m k_m \tag{9}$$

$y_i = y(t_i)$ жаңа мәні есептеледі.

Төртқадамды Рунге-Кутта әдісінде алдымен келесі элементтер есептеледі:

$$K_1 = f(x_i, y_i),$$

$$K_2 = f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{hK_1}{2}), \qquad (10)$$
$$K_3 = f(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{hK_2}{2}),$$
$$K_4 = f(x_i + h; y_i + hK_3),$$
$$\Delta y_i = \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4).$$

Одан кейін, келесі формуламен Коши есебінің жұықталған шешімі есептеледі:

$$y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1}. \qquad (11)$$

Бір қадам аралығында әдіс қателігі h^5 – ретті.

Мысал 3

Есептегенде 3-дұрыс цифрлар қолдана отырып Рунге-Кутта әдісімен Коши есебін шеш, h=0,5:

$$y' = y(\frac{1}{2x} - 1); \; x \in [1; 2];$$
$$y(1) = 2{,}70;$$

Шешім: Алдымен i=0, K_1, K_2, K_3, K_4 элементтерді есептейміз:

$$K_1 = f(x_0, y_0) = 2{,}70 * (\frac{1}{2*1} - 1) = -1{,}35;$$
$$K_2 = f(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{hK_1}{2}) = f(1{,}25; 2{,}363) = 2{,}363 * (\frac{1}{2*1{,}25} - 1) = -1{,}42;$$
$$K_3 = f(x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{hK_2}{2}) = f(1{,}25; 2{,}346) = 2{,}346 * (\frac{1}{2*1{,}25} - 1) = -1{,}41;$$
$$K_4 = f(x_0 + h; y_0 + hK_3) = f(1{,}5; 2) = 2 * (\frac{1}{2*1.5} - 1) = -1{,}33;$$
$$\Delta y_0 = \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) = \frac{0{,}5}{6}(-1{,}35 + 2*(-1{,}42) + 2*(-1{,}41) + (-1{,}33)) =$$
$$= -0{,}694.$$

x=1,5 түйінде: $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 2{,}70 - 0{,}694 = 2{,}01.$

Басқа түйіндерде функция мәні жоғарыда жазылған ретімен табылады. Әдісті қолдану нәтижесі 3-кестеде келтірілген:

3 -кесте. Рунге-Кутта әдісін жүзеге асыру.

i	x_i	y_i	K_1	K_2	K_3	K_4	Δx_i
0	1,00	2,70	-1,35	-1,42	-1,41	-1,33	-0,694
1	1,50	2,01	-1,34	-1,19	-1,22	-1,05	-0,601
2	2,00	1,40	-1,05	-0,888	-0,920	-0,756	-0,452
3	2,50	0,953	-0,762	-0,624	-0,652	-0,522	-0,320
4	3,00	0,633	-	-	-	-	-