4 ФУНКЦИЯНЫҢ ЖАҚЫНДАУЫ

4.1 Функцияның интерполяциялануы

Функцияны интерполяциялау

F(x) функциясының белгілі мәндері келесі кестені құрсын.

x_i	X_0	X_1	…	x_n
$F(x_i)$	Y_0	Y_1	…	y_n

(4.1)

$[x_0, x_n]$ аралығында жататын, бірақ x_i-лердің ешқайсысымен сәйкес келмейтін x-тегі функция мәнін табу керек болсын.

Әдетте функцияның аналитикалық өрнегі берілсе, онда x-тің орнына мәнін қойып функция мәнін есептей салуға болатын. Кей жағдайда функцияның аналитикалық өрнегі мүлде белгісіз болуы немесе есептеуге көп уақытты қажет етуі мүмкін. Осындай жағдайларда берілген кесте бойынша f функциясына жуық F жуықтаушы функцияны құрады:

$$f(x)=F(x) \tag{4.2}$$

Құрылған жуықтаушы функция келесі шарттарды қанағаттандыруы керек:

$$F(x_0)=y_0,\ F(x_1)=y_1,\ F(x_2)=y_2, \ldots, F(x_n)=y_n \tag{4.3}$$

Мұндай есепті функцияны интерполяциялау есебі деп атайды. Ал x_0, x_1, x_2, … , x_n нүктелерін – интерполяциялау тораптары немесе түйіндері деп атайды.

F(x) интерполяиялаушы функцияны n дәрежелі көпмүшелік түрінде іздейді: Лагранж, Ньютон, Гаусс, Бессель, Стирлинг, т.б.

Егер интерполяциялық түйіндердің бір бірінен ара қашықтықтары тұрақты емес болса, Лагранждың көпмүшелігі, тұрақты болса – Ньютонннның көпмүшеліктері қолданылады.

4.1.1 Ньютонннның интерполяциялық формулалары

Егер интерполяциялық түйіндердің бір бірінен ара қашықтығы тұрақты болса, практикада Ньютонның интерполяциялық формулалары қолданылады. Бұл формулалар екіге бөлінеді:

1 Алдыға қарай интерполяциялау;

2 Кері интерполяциялау;

Егер берілген x нүктесінің мәні кестенің бас жағында жатса, 1-формуласы қолданылады:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \tag{4.11}$$

Мұндағы $q = \frac{x - x_0}{h}$

Егер берілген x нүктесінің мәні кестенің соңғы жағянда жатса, 2-формула қолданылады:

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3} + \ldots + \frac{q(q+1)(q+2)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (4.12)$$

$$q = \frac{x - x_n}{h}$$

Формулалардағы Δy_0, $\Delta^2 y_0$, т.с. сияқтылар шектік айырымдар деп аталады және 7-кестені толтыру арқылы анықталады. Кестедегі мысал үшін 6 интерполяциялық түйін және шектік айырымдардың 4-ші дәрежесіне дейінгі мәндер қарастырылған. 1-формула үшін кестенің бірінші жолындағы мәндер, 2-формула үшін кестенің соңғы жолындағы мәндер қолданылады.

7-кесте – Шектік айырымдар кестесі

x	Y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
X_0	Y_0	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$	$\Delta^4 y_0 = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y_0$
X_1	Y_1	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$	$\Delta^4 y_1 = \Delta^3 y_2 - \Delta^3 y_1$
X_2	Y_2	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_4$	$\Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_1$	
X_3	Y_3	$\Delta y_3 = y_4 - y_3$	$\Delta^2 y_3 = \Delta y_5 - \Delta y_4$		
X_4	Y_4	$\Delta y_3 = y_5 - y_4$			
X_5	Y_5				

Егер интерполяциялық түйіндер саны 1 немесе 2-ге тең болса сызықты интерполяциялық формуланы қолдануға болады: $y(x) = y_0 + q\Delta y_0$.

Қателіктерін бағалау:

1-формула үшін мына формула қолданылады:

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in x_i, \quad \mathrm{i} = 0,1,2,\ldots$$

немесе

$$R_n(x) = \frac{\Delta^{n+1}y_0}{(n+1)!}q(q-1)(q-2)\ldots(q-n) \quad \xi \in x_i, \quad \mathrm{i} = 0,1,2,\ldots$$

2-формула үшін мына формула қолданылады:

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q+1)(q+2)\ldots(q+n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in x_i, \quad \mathrm{i} = 0,1,2,\ldots$$

Мысал:

y=lg(x) функциясының мәндері 8-кестеде берілген, lg1001 мәнін табу керек.

3-ретті шектік айырымдар тұрақты бола бастағандықтан кестені толтыруды тоқтатамыз. Формулада n=3 деп аламыз. Q=0,1. x=1001. Ньютонның бірінші формуласын қолданамыз, себебі x-тің мәні кестенің бас жағында жатыр, сонда $\lg 1001=3.00043417+0.5*10^{-9}$ болатынын қалдық мүшенің формуласын қолдану арқылы анықтаймыз.

8-кесте – y=lg(x) функциясының мәндері және шектік айырымдары кестесі

X	Y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1000	3.0000000	43 214	-426	8
1010	3.0043214	42 788	-418	9
1020	3.0086002	42 370	-409	8
1030	3.0128372	41 961	-401	
1040	3.0170333	41 560		
1050	3.0211893			

4.1.2 Лагранждың интерполяциялық көпмүшелігі

$$L_n(x) = y_0 \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\dots\cdot(x-x_n)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot\dots\cdot(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot\dots\cdot(x-x_n)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot\dots\cdot(x_1-x_n)} +$$

$$\dots + y_n \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\dots\cdot(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\cdot(x_n-x_1)\cdot\dots\cdot(x_n-x_{n=1})} = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\prod_{i\neq k}\frac{(x-x_k)}{(x_k-x_i)}$$

(4.4)

Кей жағдайда есептеу процесін жеңілдету үшін x=at+b, $x_j=at_j+b$ j=0,1,…,n сызықты алмастыруын жасау арқылы Лагранж коэффициенттерінің инварианттылығын қолдануға болады, онда (4.4)-формула келесі түрге келеді:

$$L_i^{(n)}(x) = L_i^n(t)$$

(4.5)

Эйткен схемасы

Егер Лагранж көпмүшелігінің жалпы өрнегін анықтамай, тек белгілі бір нүктедегі функция мәнін есептеу керек болса, онда Эйткен схемасын қолдануға болады:

$$L_{i,i+1}(x) = \frac{1}{x_{i+1}-x_i}\begin{vmatrix} y_i & x_i - x \\ y_{i+1} & x_{i+1}-x \end{vmatrix} \qquad (4.6)$$

$$L_{i,i+1,i+2}(x) = \frac{1}{x_{i+2}-x_i}\begin{vmatrix} L_{i,i+1}(x) & x_i - x \\ L_{i+1,i+2}(x) & x_{i+2}-x \end{vmatrix}$$

$$L_{i,i+1,i+2,i+3}(x) = \frac{1}{x_{i+3} - x_i}\begin{vmatrix} L_{i,i+1,i+2}(x) & x_i - x \\ L_{i+1,i+2,i+3}(x) & x_{i+3} - x \end{vmatrix} \text{ т.с.с.}$$

Эйткен схемасы келесі 6-кестені толтыру арқылы орындалады.

6-кесте – Эйткен схемасының толтырылу кестесі

$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{y_i}$	$\mathbf{X_i\text{-}x}$	$\mathbf{L_{i-1,i}}$	$\mathbf{L_{i-2,i-1,i}}$	$\mathbf{L_{i-3,i-2,i-1,i}}$	**…**
X_0	Y_0	X_0-x				
X_1	Y_1	X_1-x	$L_{01}(x)$			
X_2	Y_2	X_2-x	$L_{12}(x)$	$L_{012}(x)$		
X_3	Y_3	X_3-x	$L_{23}(x)$	$L_{123}(x)$	$L_{0123}(x)$	…
X_4	Y_4	X_4-x	$L_{34}(x)$	$L_{234}(x)$	$L_{1234}(x)$	…

Эйткен схемасын есептеуді көршілес $L_{0123\ldots n}(x)$, $L_{0123\ldots n,n+1}(x)$ мәндері берілген дәлдік маңайында бір бірімен беттессе тоқтатуға болады.

X_i нүктелерінде y_i мәндерін қабылдайтын n-ші дәрежелі интерполяциялық көпмүшелік келсі түрде де жазылады:

$$L_{0123\ldots n}(x) = \frac{1}{x_n - x_0}\begin{vmatrix} L_{012\,(n-1)}(x) & x_0 - x \\ L_{123\ldots n}(x) & x_n - x \end{vmatrix}. \qquad (4.7)$$

1-Мысал:

Төмендегі кестемен берілген функция үшін Лагранж көпмүшелігін құру.

I	0	1	2	3
x_i	0	0.1	0.3	0.5
y_i	-0.5	0	0.2	1

(4.8)

Шешімі: (4.4)-формула бойынша n=3, i=0,1,2,3 болғандағы өрнекті анықтаймыз:

$$L_0^3(x) = \frac{(x-0.1)\cdot(x-0.3)\cdot(x-0.5)}{(-0.1)\cdot(-0.3)\cdot(-0.5)} = -\frac{x^3 - 0.9x^2 + 0.23x - 0.015}{0.015},$$

$$L_2^3(x) = \frac{x(x-0.1)\cdot(x-0.5)}{0.3\cdot 0.2\cdot(-0.2)} = -\frac{x^3 - 0.6x^2 + 0.05x}{0.012},$$

$$L_3^3(x) = \frac{x(x-0.1)\cdot(x-0.3)}{0.5\cdot 0.4\cdot 0.2} = \frac{x^3 - 0.4x^2 + 0.03x}{0.04}.$$

$L_1^3(x)$ мүшесін есептемейміз, себебі y_1=0. Бәрін бір біріне қосамыз да көпмүшеліктің соңғы түрін аламыз:

$$L_3(x) = L_0^3(x)\cdot y_0 + L_2^3(x)\cdot y_2 + L_3^3(x)\cdot y_3 = \frac{125}{3}x^3 - 30x^2 + \frac{73}{12}x - 0.5.$$

2-мысал:

Төмендегі кестемен берілген функцияның x=0.45 нүктесіндегі мәнін анықтау керек.

X	0.05	0.15	0.20	0.25	0.35	0.40	0.50	0.55
y	0.9512	0.8607	0.8187	0.7788	0.7047	0.6703	0.6065	0.5769

(4.9)

Шешімі:

Есептеуді жеңілдету үшін x=0.05t деп алайық. X-тердің мәні белгілі болғанда t-лардың мәндерін тауып алуға болады, олар: 1, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11. Және x=0.45 болғандағы t=9 болады. Есептеу қадамдары 6' -кестеде келтірілген.

6' -кесте – (4.9)-есептің есептелу қадамдары

I	t_i-t_j (i<>j)								D_i	y_i	$\frac{y_i}{D_i}$
0	8	-2	-3	-4	-6	-7	-8	-10	-725 760	0.9512	-0.0131*10^{-4}
1	2	6	-1	-2	-4	-5	-7	-8	26 880	0.8607	0.3202*10^{-4}
2	3	1	5	-1	-3	-4	-6	-7	-7 560	0.8187	-1.0829*10^{-4}
3	4	2	1	4	-2	-3	-5	-6	5 760	0.7788	1.3520*10^{-4}
4	6	4	3	2	2	-1	-3	-4	-3 456	0.7047	-2.0390*10^{-4}
5	7	5	4	3	3	1	-2	-3	2 520	0.6703	2.6599*10^{-4}
6	9	7	6	5	5	2	-1	-1	11 340	0.6065	0.5348*10^{-4}
7	10	8	7	6	6	3	1	-2	-80 640	0.5769	-0.0715*10^{-4}
$\prod(t) = 3840$									$s = \sum_{i=0}^{7} \frac{y_i}{D_i} = 1.6604 * 10^{-4}$		

Сонымен y(0.45)= $\prod(t) \sum_{i=0}^{7} \frac{y_i}{D_i} = \prod(t)\, s =$ 3840*1.6604*10^{-4}=0.6376.

Гаусс интерполяциялық формулалары

Гаусс формулаларын берілген x-тің мәні кестенің ортасына жақын орналасқан жағдайларда қолданады. Егер $x>x_0$ болса Гаусстың 1-формуласы, $x<x_0$ болса, Гаусстың 2-формуласын қолданады.

1-формуласы:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} +$$
$$\frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)(q-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + \ldots \qquad (4.13)$$
$$+ \frac{(q+n-1)....(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + + \frac{(q+n-1)...(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

2-формуласы:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} +$$
$$+ \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \ldots + \qquad (4.14)$$
$$+ \frac{(q+n-1)...(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} + \frac{(q+n)(q+n-1)..(q-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}$$

Бұл формулалардағы Δy_{-1}, Δy_0, $\Delta^2 y_{-1}$, $\Delta^3 y_{-2}$, $\Delta^3 y_{-1}$, $\Delta^4 y_{-2}$, $\Delta^5 y_{-2}$, $\Delta^5 y_{-3}$, $\Delta^6 y_{-3}$ шектік айырымдарды табу үшін 9- кесте құру керек.

Мысалы:

$y=e^x$ функциясының мәндері кесте да келтірілген. X=1.17, x=1.13 нүктелеріндегі мәндерді анықтау керек.

Шешімі:

Шектік айырымдарды анықтау 10-кестесін құрамыз.

9 - кесте – Гаусс формуласы үшін шектік айырымдар кестесі

x	Y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
x_{-4}	y_{-4}	Δy_{-4}					
x_{-3}	y_{-3}	Δy_{-3}	$\Delta^2 y_{-4}$	$\Delta^3 y_{-4}$	$\Delta^4 y_{-4}$	$\Delta^5 y_{-4}$	$\Delta^6 y_{-4}$
x_{-2}	y_{-2}	Δy_{-2}	$\Delta^2 y_{-3}$	$\Delta^3 y_{-3}$	$\Delta^4 y_{-3}$	$\Delta^5 y_{-3}$	$\Delta^6 y_{-3}$
x_{-1}	y_{-1}	Δy_{-1}	$\Delta^2 y_{-2}$	$\Delta^3 y_{-2}$	$\Delta^4 y_{-2}$	$\Delta^5 y_{-2}$	$\Delta^6 y_{-2}$
X_0	Y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_{-1}$	$\Delta^3 y_{-1}$	$\Delta^4 y_{-1}$	$\Delta^5 y_{-1}$	
X_1	Y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$		
X_2	Y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$			
X_3	Y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_2$				
X_4	Y_4						

10-кесте – $y=e^x$ функциясының мәндері және шектік айырымдары

i	x_i	y_i	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
-3	1.00	2.7183	1394	71	4
-2	1.05	2.8577	1465	75	4

-1	1.10	3.0042	1540	79	4
0	1.15	3.1582	1619	83	5
1	1.20	3.3201	1702	88	
2	1.25	3.4903	1790		
3	1.30	3.6693			

3-ретті шектік айырымдар тұрақтана бастағандықтан кесте ны осы арада тоқтатамыз. 1,17 нүктесіндегі мәнді есептеу үшін Гаусстың 1-формуласын қолданамыз, себебі, ол нүкте x_0 нүктесінен артық. Q=0.4 болады. Гаусстың 1-формуласына кестедегі мәндерді қоямыз: сонда

$$e^{1.17} = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} = 3.1582 + 0.4\cdot 0.1619 +$$

$$+\frac{0.4\cdot(-0.6)}{2}0.0079 + \frac{0.4\cdot(-0.6)\cdot 1.4}{6}0.0004 = 3.2220 .$$

$e^{1.13}$ дәрежесін есептеу үшін Гаусстың екінші формуласын қолданамыз, себебі 1,13 нүктесі x_0 нүктесінен кіші:

$$e^{1.13} = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} = 3.1582 - 0.4\cdot 0.1540 -$$

$$-\frac{0.4\cdot 0.6}{2}0.0079 + \frac{0.6\cdot(-0.4)\cdot(-1.4)}{6}0.0004 = 3.0957 .$$

Стирлингтің және Бессельдің интерполяциялық көпмүшеліктері

Стирлингтің формуласы Гаусс формулаларының арифметикалық ортасы болып табылады. $|q| \le 0.25$ болған жағдайда қолданылады:

$$P(x) = y_0 + q\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{q(q^2-1^2)}{3!}\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \qquad (4.15)$$

$$\frac{q(q^2-1^2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + + \frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)}{6!}\Delta^6 y_{-3} + \ldots$$

$$+\frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)\ldots[q^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!}\frac{\Delta^{2n-1}y_{-n} + \Delta^{2n-1}y_{-(n-1)}}{2} +$$

$$+\frac{q^2(q^2-1^2)(q^2-2^2)\ldots[q^2-(n-1)^2]}{(2n)!}\Delta^{2n}y_{-n} .$$

1.2 Ең кіші квадраттар әдісі

Әлдебір тәжірибе немесе эксперимент жүргізу барысында алынған сандық деректерді өңдеу арқылы алынған нәтижені анализдеу немесе нәтижені сараптап қортынды шығару керек болатын жағдайлар аз емес. Тәжірибе барысында алнған деректерден кесте құрып, сол кесте лық мәнге сәйкес функцияның аналитикалық өрнегін анықтау да интерполяция есебіне жатады. Практикада эксперименттік деректерді сараптау үшін ең кіші квадраттар әдісі қолданылады.

Ең кіші квадраттар әдісі

Жүргізілген тәжірибе кезінде алынған мәндер келесі кестені құрсын.

11-кесте

x_i	X_0	X_1	…	x_n
$F(x_i)$	Y_0	Y_1	…	y_n

(4.16)

Осы тәуелділікті аналитикалық өрнектейтін формуланы табу керек:

$$Y=F(x) \qquad (4.17)$$

Бұл функция x_1, x_2, ..., x_n нүктелерінде y_1, y_2, …, y_n мәндерін қабылдауы керек.

Алдында қарастырған зертханалық жұмыстағы интерполяциялық көпмүшеліктерді қолдану арқылы аналитикалық өрнекті таба салуға болар еді. Бірақ кей жағдайда ол әдістермен табылған мәндер бірдей болғанмен мазмұндары әр түрлі болуы мүмкін. Сондықтан практикада көбіне жуықтаушы F функциясын анықтау үшін (4.16)-кесте бойынша f функциясының нүктелік графигін сызып, нүктелердің орналасу ретіне байланысты қисықтың түрін анықтайды. Бұл жағдайда да тәжірибеге қатысатын әрбір шама көптеген кездейсоқ факторлардан тәуелді болғандықтан (4.17)-кесте үшін функционалды байланыс толық болмауы мүмкін. Бірақ (4.17)-эмпирикалық формула көмегімен табылатын аналитикалық өрнек у шамасының өлшеу нәтижелерін жатықтандыра отырып х-тің кесте лық емес мәндері үшін f функциясының мәндерін табуға көмектеседі.

(4.17)-формуланы табудың ең көп қолданылатын әдісінің бірін қарастырайық:

F жуықтаушы функциясының x_1, x_2, ..., x_n нүктелеріндегі қабылдайтын мәндері

$$\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3, ..., \overline{y}_n \qquad (4.18)$$

болсын.

Кестедегі y_1, y_2, …, y_n мәндері мен (4.18)-мәндердің жақындығы былай түсіндіріледі:

(4.16)-кестедегі мәндер жиыны мен (4.17)-формуладағы мәндер жиынын n өлшемді кеңістіктегі екі нүктенің координаттары деп қарастырайық. Сонда есеп келесі түрге келеді $-M(y_1, y_2, ..., y_n)$ және $M(\overline{y}_1, \overline{y}_2, ..., \overline{y}_n)$ нүктелерінің ара қашықтығы өте кішкентай болатындай берілген түрдегі F функциясын табу керек. Евклидтік кеңістіктегі метриканы қолдансақ,

$$\sqrt{(y_1-\overline{y}_1)^2+(y_2-\overline{y}_2)^2+...+(y_n-\overline{y}_n)^2} \qquad (4.19)$$

шамасы ең кіші болуы керек, одан шығатыны

$$(y_1-\overline{y}_1)^2+(y_2-\overline{y}_2)^2+...+(y_n-\overline{y}_n)^2 \qquad (4.20)$$

квадраттар қосындысы да ең кіші болуы керек.

Сонда есептің қойылымы мына түрге келеді: (4.16)-кесте мен берілген f функциясы үшін (4.20)-квадраттар қосындысы ең кіші болатындай түрде анықталған F жуықтаушы функциясын табу керек. Бұл есепті ең кіші квадраттар әдісі деп атайды.

Жуықтаушы функция ретінде f функциясының нүктелік графигінің түріне қарай келесі функциялар қолданылады:

1 $y = ax + b$

2 $y = ax^2 + bx + c$

3 $y = ax^m$

4 $y = a \cdot e^{mx}$

5 $y = \dfrac{1}{ax + b}$

6 $y = a \cdot \ln x + b$

7 $y = a\dfrac{1}{x} + b$

8 $y = \dfrac{x}{ax + b}$

Мұндағы a, b, c, m - параметрлер. Жуықтаушы функцияның түрі белгілі болғанда есеп осы параметрлерді анықтауға келеді.

Жалпы түрде үш параметрден тәуелді жуықтаушы функцияның параметрлерін анықтауды қарастырайық:

$$y = F(x, a, b, c) \tag{4.21}$$

$F(x_i, a, b, c) = \overline{y}_i$, i = 1,2,..., n болады. F және f функцияларының сәйкес мәндерінің айырымдарының квадраттарының қосындысы $\sum_{i=1}^{n} [y_i - F(x_i, a, b, c)]^2 = \Phi(a, b, c)$ үш айнымалыдан тәуелді функция болады. Оның минимумын табу керек. Экстремумдардың қажетті шарттарын қолданамыз:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0$$

яғни

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} [y_i - F(x_i, a, b, c)]^2 \cdot F_a'(x_i, a, b, c) = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} [y_i - F(x_i, a, b, c)]^2 \cdot F_b'(x_i, a, b, c) = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} [y_i - F(x_i, a, b, c)]^2 \cdot F_c'(x_i, a, b, c) = 0 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Үш белгісізді үш теңдеуден тұратын теңдеулер жүйесін шешу арқылы параметрлерді тауып, жуықтаушы функцияның аналитикалық түрін толық анықтауға болады. Бұдан көретініміздей, параметрлердің санын қаншалықты өзгертсек те жүйенің теңдеулер саны ғана өзгереді.

$$y_i - F(x_i, a, b, c) = \varepsilon_i \quad (i = 1,2,..., n) \tag{4.23}$$

айырмаларының мәндері ауытқулар деп аталады. Бұл ауытқулардың қосындыларының квадраты да минималды болуы керек:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \qquad (4.24)$$

Ауытқулардың қосындыларының квадраттарының ең кішісі үшін құрылатын жуықтаушы функция ең тиімді функция бола алады.

Жуықтаушы функцияны сызықты функция және екінші дәрежелі үшмүшелік түрінде табу

Бұл есепті сызықты және квадратты регрессия деп те атайды.

Жуықтаушы функцияны келесі түрде іздейміз:

$$F(x, a, b, c) = ax + b \qquad (4.25)$$

Параметрлер бойынша дербес туындыларды табамыз:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = x, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{b}} = 1$$

(4.21) түріндегі жүйені құрамыз:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)x_i = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0 \end{aligned} \qquad (4.26)$$

Бұдан

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - nb = 0$$

екендігі шығады.

Әрбір теңдеуді n-ға бөлсек:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot a + \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ &\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot a + b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \end{aligned} \qquad (4.27)$$

Белгілеулер енгіземіз:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = M_x, \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = M_y$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = M_{xy}, \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = M_{x^2}$$

Сонда соңғы жүйе мына түрге келеді:

$$\begin{aligned} &M_{x^2} \cdot a + M_x \cdot b = M_{xy} \\ &M_x \cdot a + b = M_y \end{aligned} \qquad (4.28)$$

Бұл жүйенің коэффициенттері M_x, M_y, M_{x^2}, M_{xy} -сандарын (4.27)-формуламен есептеп тауып алуға болады. Мұндағы x_i, y_i -лер кестедегі мәндер. (4.28)-жүйені шешу арқылы a,b-ларды табамыз және (4.25)- сызықты функцияның аналитикалық өрнегін табамыз.

Жуықтаушы функцияны квадрат үшмүшелік түрінде табайық:

$$F(x,a,b,c) = ax^2 + bx + c \tag{4.29}$$

Дербес туындыларын табамыз:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = x^2, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = x, \quad \frac{\partial F}{\partial c} = 1 .$$

(4.21) түріндегі жүйе құрамыз:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i^2 - bx_i - c)\cdot x_i^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i^2 - bx_i - c)\cdot x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i^2 - bx_i - c) = 0$$

Қарапайым ауыстырулардан кейін a,b,c үш белгісізді үш сызықты теңдеуден тұратын жүйе алынады.Алдыңғы әдістегі сияқты жүйені мына түрге келтіреміз:

$$\begin{aligned} &M_{x^4}\cdot a + M_{x^3}\cdot b + M_{x^2}c = M_{x^2y} \\ &M_{x^3}\cdot a + M_{x^2}\cdot b + M_{x}c = M_{xy} \\ &M_{x^2}\cdot a + M_{x}\cdot b + c = M_{y} \end{aligned} \tag{4.30}$$

Мұнда (4.27)–белгілеулері және

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^4 = M_{x^4}, \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^3 = M_{x^3}, \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 y_i = M_{x^2y} \tag{4.31}$$

белгілеулері қолданылды. (4.30)-жүйеден параметрлер мәндерін және жуыфқтаушы функцияны табуға болады.

Жуықтаушы функцияны дәрежелік функция (геометриялық регрессия) түрінде табу

Жуықтаушы функцияны келесі түрде іздейміз:

$$F(x,a,m) = ax^m \tag{4.32}$$

(4.16)-кестедегі функция және аргумент мәндері оң деп есептеп (4.32)-теңдікті a>0 шарты бойынша логарифмдейміз:

$$\ln F = \ln a + n\ln x \tag{4.33}$$

F функциясы f функциясына жуықтаушы функция болғандықтан lnF функциясы lnf функциясының жуықтаушысы болады. Жаңа айнымалы енгізейік: $u = \ln x$, онда (4.33)-ден lnF функциясы u: Ф(u) функциясы болады.

M=A, lna=B (4.34)

деп белгілейік, онда (4.33) келесі түрге келеді де есеп сызықты жуықтаушы функцияны табуға келтіріледі:

$$\Phi(u,A,B) = Au + B \tag{4.35}$$

Практикада келесі әрекеттерді орындау керек:

1 (4.16)-кесте бойынша x және y мәндерін логарифмдеу арқылы жаңа кесте құру керек.

2. Жаңа кестеден (4.35)-түріндегі жуықтаушы функцияның A, B параметрлерін табу керек.
3. (4.34)-белгілеулерін қолданып a,m параметрлерін тауып, олардың мәндерін (4.32)-ге қою керек.

Жуықтаушы функцияны көрсеткіштік функция түрінде табу

Жуықтаушы функцияны келесі түрде іздейміз:

$$F(x, a, m) = a \cdot e^{mx}, \quad a > 0 \tag{4.36}$$

(4.36)-ны логарифмдейміз:

$$\ln F = \ln a + mx \tag{4.37}$$

(4.34)-белгілеулерді қолданып келесі түрде жазып аламыз:

$$\ln F = Ax + B \tag{4.38}$$

Жуықтаушы функцияны (4.36)-түрінде табу үшін кестедегі мәндерді логарифмдеу керек, сосын жаңа кесте құрылады. Жаңа кесте үшін (4.38)-түріндегі жуықтаушы функцияны құру керек. (4.34)-белгілеулерді қолданып a,b параметрлерінің мәндерін тауып (4.36)-ға қою керек.

Жуықтаушы функцияны сызықты-бөлшек функция түрінде іздеу

Жуықтаушы функцияны келесі түрде іздейміз:

$$F(x, a, b) = \frac{1}{ax + b} \tag{4.39}$$

(4.39)-теңдікті басқаша жазып аламыз:

$$\frac{1}{F(x, a, b)} = ax + b$$

Соңғы теңдіктен a,b параметрлерінің мәндерін табу үшін (4.16)-кестедегі аргументтердің мәндерін өзгертпей, функция мәндерінің орнына кері мәндерді алу арқылы жаңа кесте құрып, жуықтаушы функцияны ax+b түріне құру керек. Сосын параметрлерді тауып (4.39)-ға қояды.

Жуықтаушы функцияны логарифмдік функция түрінде іздеу

Жуықтаушы функцияны келесі түрде іздейік:

$$F(x, a, b) = a \cdot \ln x + b \tag{4.40}$$

Сызықты функцияға айналдыру үшн $\ln x = u$ алмастыруын жасауға болады. Бұдан шығатыны, a,b параметрлерін табу үшін (4.16)-кестедегі аргумент мәндерін логарифмдеп, алынған мәндерді берілген функция мәндері жиынында қарастырып, алынған жаңа кестеден сызықты жуықтаушы функция түрін аламыз. Одан табылған параметрлерді (4.40)-қа қоямыз.

Жуықтаушы функцияны гипербола түрінде табу

(4.16)-кесте бойынша сызылған нүктелік график гипербола тарағын беретін болса, онда жуықтаушы функцияны келесі түрде іздеуге болады:

$$F(x, a, b) = \frac{a}{x} + b \tag{4.41}$$

Сызықты түрге көшу үшін $u = \frac{1}{x}$ алмастыруын жасаймыз:

$$\Phi(u, a, b) = au + b \qquad (4.42)$$

(4.16)-кестедегі аргумент мәндерін кері мәндермен ауыстыру керек. Сосын жаңа кесте үшін жуықтаушы функцияны (4.42)-түрінде табу керек. Алынған параметр мәндерін (4.41)-ге қояды.

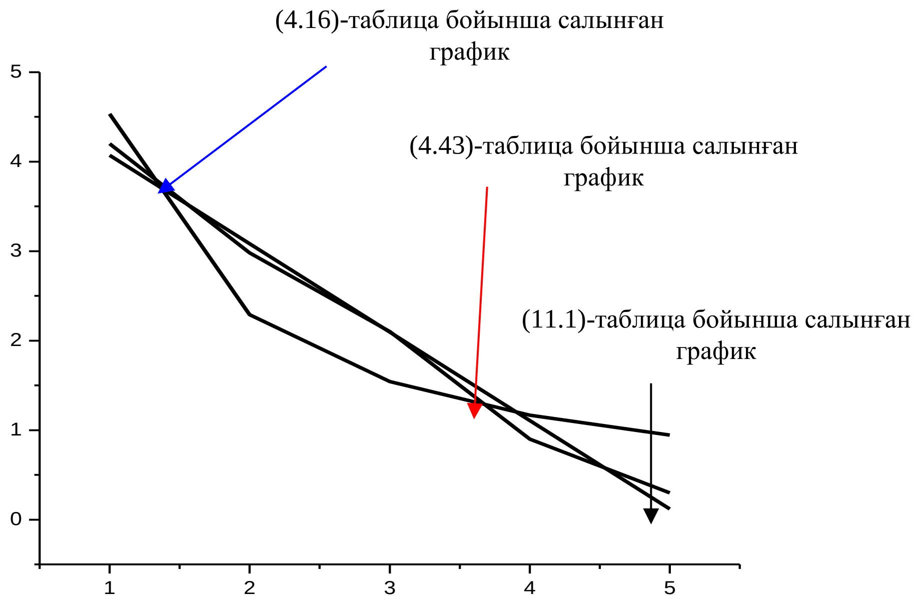
Мысалы:

Белгілі бір эксперимент барысында мынадай нүктелер алынған болсын делік:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	4,2	2,98	2,1	0,9	0,3

(4.43)

Егер осы деректерге сүйеніп график салсақ (3-суретте), оған бір қарағанда пайда болған сызықты түзуге және гиперболаға интерполяциялауға болатыны көрінеді.



3-сурет – (4.43)-есепте келтірілген деректердің графигі

Ендеше осы екі жағдайды да қарастырып, ауытқулардың квадраттарының қосындыларын салыстыра отырып, қайсысын таңдаған жөн болатынын көрейік.

1 Жуықтаушы функция $y = ax + b$ түріндегі түзу сызық болсын. Осы түзідің a және b параметрлерінің мәндерін анықтайық. y_i мәндерінің $y = ax + b$ түзуінен ауытқуы:

$$\varepsilon_i = y_i - ax_i - b$$

ауытқудың квадраты:

$$\varepsilon_i^2 = (y_i - ax_i - b)^2 = a^2 x_i^2 + abx_i - ax_i y_i + abx_i + b^2 - by_i - ax_i y_i - by_i + y_i^2 =$$
$$= a^2 x_i^2 + 2abx_i - 2ax_i y_i - 2by_i + b^2 + y_i^2$$

Ауытқулардың квадраттарының қосындысы:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = a^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2ab \sum_{i=1}^{n} x_i - 2a \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - 2b \sum_{i=1}^{n} y_i + nb^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

Белгілеулер енгізейік:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} = M_{xx} \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = M_x \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = M_y \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} = M_{xy}$$

Сонда мына түрге келеміз:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = na^2 M_{xx} + 2nabM_x - 2naM_{xy} - 2nbM_y + nb^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

Осы жиыннан a және b параметрлері бойынша дербес туындылар аламыз және оларды нөлге теңестіреміз:

$$\frac{\partial(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2)}{\partial a} = 2naM_{xx} + 2nbM_x - 2nM_{xy} = 0 ; \quad \frac{\partial(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2)}{\partial b} = 2naM_x - 2nM_y + 2nb = 0$$

Теңдеулерді $2n$ -ге бөліп мына түрге келеміз:

$$\begin{cases} aM_{xx} + bM_x - M_{xy} = 0 \\ aM_x - M_y + b = 0 \end{cases}$$

Теңдеулер жүйесін a және b -ға қатысты шешіп мынадай өрнектер аламыз:

$$a = \frac{M_{xy} - M_x M_y}{M_{xx} - M_x^2} \qquad b = M_y - aM_x$$

Енді осы алынған нәтижелерді мысалдың басында келтірілген 11-кестеге қолданып көрейік.

11.1-кесте – (4.43)-есепке қою нәтижесі

i	1	2	3	4	5	$\sum_{i=1}^{5}$
x_i	1	2	3	4	5	15
y_i	4,2	2,98	2,1	0,9	0,3	10,48
x_i^2	1	4	9	16	25	55
$x_i y_i$	4,2	5,96	3,6	3,6	2,5	21,56

Сонымен:

$M_x = 3 \qquad M_{xx} = 11 \qquad M_{xy} = 4.312 \qquad M_y = 2.096 \qquad a = -0.988 \qquad b = 5.06$

Іздеп отырған түзудің теңдеуі: $y = -0.988x + 5.06$; $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = 0.24688$

11-кесте – Ауытқулардың квадраттарының қосындысы

x_i	1	2	3	4	5
y_i	4,2	2,98	2,1	0,9	0,3
$y = ax + b$	4,072	3,084	2,096	1,108	0,12
$\varepsilon_i = \lvert y - y_i \rvert$	0,218	0,104	0,004	0,208	0,42
ε_i^2	0,016384	0,010816	0,000016	0,043264	0,1764

(4.44)

2 Жуықтаушы функция $y = \frac{a}{x} + b$ түріндегі гипербола болатын жағдайды қарастырайық. a және b параметрлерін анықтайық. y_i мәндерінің $y = \frac{a}{x} + b$ гиперболасынан ауытқуы:

$$\varepsilon_i = y_i - \frac{a}{x_i} - b$$

ауытқудың квадраты:

$$\varepsilon_i^2 = (y_i - \frac{a}{x_i} - b)^2 = y_i^2 - 2a\frac{y_i}{x_i} - 2by_i + 2ab\frac{1}{x_i} + a^2\frac{1}{x_i^2} + b^2$$

Ауытқулардың квадраттарының қосындысы:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2a\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i} - 2b\sum_{i=1}^{n} y_i + 2ab\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} + a^2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2} + nb^2$$

Белгілеулер енгізейік:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}}{n} = M_{xx} \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}{n} = M_x \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = M_y \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i}}{n} = M_{xy}$$

Сонда мына түрге келеміз:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2naM_{xy} - 2nbM_y + 2nabM_x + 2na^2M_{xx} + nb^2$$

Осы жиыннан a және b параметрлері бойынша дербес туындылар аламыз және оларды нөлге теңестіреміз:

$$\frac{\partial(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \varepsilon_{\mathrm{i}}^2)}{\partial \mathrm{a}} = -2nM_{xy} + 2nbM_x - 2naM_{xx} = 0 \;;$$

$$\frac{\partial(\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \varepsilon_{\mathrm{i}}^2)}{\partial \mathrm{b}} = -2nM_y + 2naM_x + 2nb = 0$$

Теңдеулерді $2n$ -ге бөліп мына түрге келеміз:

$$\begin{cases} -M_{xy} + bM_x + aM_{xx} = 0 \\ -M_y + aM_x + b = 0 \end{cases}$$

Теңдеулер жүйесін a және b -ға қатысты шешіп мынадай өрнектер аламыз:

$$a = \frac{M_x M_y - M_{xy}}{M_x^2 - M_{xx}}$$

$$b = M_y - aM_x$$

12-кесте – Алынған нәтижелердің кестелік алгоритмі

i	1	2	3	4	5	$\sum_{i=1}^{5}$
x_i	1	2	3	4	5	15
y_i	4,2	2,98	2,1	0,9	0,3	10,48
$\frac{1}{x_i}$	1	0,5	0,333(3)	0,25	0,2	0,2833(3)
$\frac{1}{x_i^2}$	1	0,25	0,11111(1)	0,0625	0,04	1,4636(1)
$\frac{y_i}{x}$	4,2	1,49	0,7	0,225	0,06	6,675

Сонымен:

$M_x = 0.456\ (6)$ $M_{xx} = 0.29272\ (2)$ $M_{xy} = 1.335$ $M_y = 2.096$

$a = 4.4884$ $b = 0.0463$

Іздеп отырған гиперболаның теңдеуі:

$$y = \frac{4.4884}{x} + 0.0463 \qquad \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = 1.38505$$

13-кесте – Ауытқулардың квадраттарының қосындысы

x_i	1	2	3	4	5
y_i	4,2	2,98	2,1	0,9	0,3
$y = \frac{a}{x} + b$	4,5347	2,2905	1,5424	1,1684	0,94398
$\varepsilon_i = \lvert y - y_i \rvert$	0,3347	0,6895	0,5576	0,2684	0,64398
ε_i^2	0,112024	0,4754	0,31088	0,07204	0,41471

(4.45)

Көрініп тұрғандай, дәл осы жағдайда бірінші таңдаудың дұрыс екендігі даусыз. Жуықтаушы функцияның $y = a * \exp(mx) + b$ түрінде болатын жағдайын талдауды оқырманның өзіне қалдырдық. Осы мысал көрсеткендей, жуықтаушы функцияны дұрыс таңдап алудың практикалық есептерді шығаруда маңызы зор.