3 СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ТЕҢДЕУЛЕРДІ ШЕШУ

3.1 Сызықты емес теңдеулерді шешу кезеңдері

$f(x)$ функцияны қарастыраиқ.

$f(\zeta) \equiv 0$ шартты қанағаттандыратын кез келген сан ζ функцияның нөлі деп, немесе (1) теңдеудің шешімі деп аталады:

$$f(x) = 0 . \qquad (1)$$

Сандық әдістердің бір бөлімі «бір өлшемді сызықты емес теңдеулер» болып табылады. Физикалық және басқа да құбылыстардың теңдеумен сипатталатыны белгілі. Сол теңдеуді классикалық математикалық формуламен шешу мүмкін емес жағдайлар бар. Бұл уақытта практикада сандық әдістерге жататын әдістермен шешілетінін дәлелдеу керек. Әрине ең алдымен құрылған теңдеудің қай аралықта анықталғандығын, үзіліссіздігін, түбірінің барлығын, оның жалғыздығын дәлелдейтін аргументтерді бақылау керек. Осы этаптан өткеннен кейін ғана есепті осы теңдеуге қолдануға келетін алгоритм көмегімен шығаруға болады. Сонымен, сызықты емес теңдеулерді шешудің екі кезеңі бар, ол:

1. Түбір жатқан аралықты анықтау.
2. Түбірін берілген дәлдікпен анықтау.

Сызықты емес теңдеуді сандық шешу екі тәсілден тұрады.

1 Тура тәсіл - есепті математикалық дәлелденген бір формулаға қою арқылы тікелей шығару;

2 Итерациялық тәсіл – есепті формула көмегімен бастапқы жуықтауды беру арқылы жуықтап, біртіндеп шығару;

Тура тәсілмен шығарылған есептер дәл мәнді береді. Ал итерациялық тәсілмен шешілген есептер есептің жуық мәнін береді. Мұның ішінде итерациялық әдістер сандық әдіске жатады.

Бір өлшемді сызықты емес теңдеуді шешудің келесі әдістері бар.

1 Кесіндіні қақ бөлу - дихотомия әдісі деп аталады;

2 Хорда әдісі;

3 Жанама әдісі немесе Ньютон әдісі;

4 Қарапайым итерациялық әдіс немесе жәй итерация әдісі т.б.;

Түбір жатқан аралықты анықтау әдісі

$$F(x)=0 \qquad (2.1)$$

Бірөлшемді сызықты емес теңдеу берілген. Мұндағы F(x) функциясы [a,b] кесіндісінде анықталған және үзіліссіз болсын.

Теорема1.1: [а,в] аралығында анықталған, үзіліссіз F(x) функциясының екі шеткі нүктелердегі мәндерінің таңбалары әр түрлі болса, яғни мына шарт орындалса f(a)*f(b)<0, онда осы аралықта (2.1)-теңдеудің түбірі бар және жалғыз болады.

Практикада кейде теореманың орындалуын функцияның мәндер кестесін құру арқылы да анықтайды. Функцияның анықталу облысы бойынша a нүктесін беріп, ол нүктедегі функция мәнін анықтайды, сосын h қадаммен келесі нүктеге жылжып, сол нүктедегі функция мәнін анықтайды, сол сияқты бірнеше нүктедегі функция мәндерін анықтап, таңбасын салыстырады. Егер көрші нүктелерде функция әр түрлі таңба қабылдаса, сол аралықта жалғыз түбірі жатыр деп айтады.

1-мысал:

Берілген теңдеудің түбірін анықтау:

$$e^{x} - 10 \cdot x = 0 \quad (-\infty;+\infty)$$

Теңдеудің түбірі жатқан аралықты аналитикалық тәсілмен табамыз: ол үшін функция туындысын тауып, оны нөлге теңестіру арқылы экстремумдарын анықтаймыз: $f'(x) = e^{x} - 10$, экстремумы: x_1=Ln10=2,3;

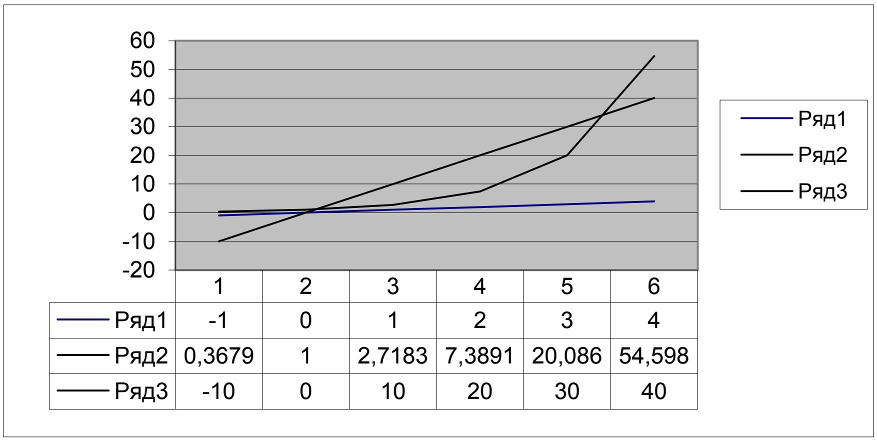
Экстремум нүктелеріндегі функция таңбасының 1-кестесін толтырамыз.

1-кесте- $f(x) = e^{x} - 10 \cdot x$ функциясының таңбасын анықтау

Нүктелер	$-\infty$	2,3	$+\infty$
sign(f)	+	-	+

Функция таңбасының ауысуы ($-\infty$; 2,3] және [2,3; $+\infty$) аралығында байқалды. Яғни осы аралықта теңдеудің түбірі бар.

Енді графиктік әдісті қарастырайық. Ол үшін теңдеуді мына түрлерге жіктейміз, себебі функция күрделі, трансцендентті, бірден графигін құруға болмайды: $f_1 = e^{x}$; $f_2 = 10x$. Екі функцияның графигін саламыз, екеуінің қиылысқан нүктесі теңдеудің түбірі болып табылады (1-сурет). Қиылысу нүктелерінің аймақтарын анықтаймыз.



1-сурет- $f_1 = e^{x}$; $f_2 = 10x$ функцияларының графиктері

Бірінші түбірі [0,1] аралығында, ал екінші түбірі [2,6] аралығында жататыны суретте көрініп тұр. Енді осы аралықтағы қай нүкте (2.1)-ші теңдеуді қанағаттандыратынын анықтаймыз.

3.2 Теңдік түбірін анықтау әдістер

3.2.1 Ньютон әдісі

Алдыңғы әдістерге қарағанда бастапқы жуықтау дұрыс таңдалынып алынса Ньютон әдісі тез жинақталады. Бұл әдіске қатысты теореманы келтіре кетейік:

Теорема 1.3.: f(x) функциясы [a,b] аралығында анықталған және екі ретті туындысы бар, осы аралықта түбір жатыр f(a)*f(b)<0, туындылардың таңбалары осы аралықта тұрақты болса $f(x)*f'(x)>0$, онда $f(x_0)*f''(x_0)>0$ теңсіздігін қанағаттандыратын $x_0 \in [a,b]$ бастапқы жуықтаудан бастап (2.1)-ші теңдеуді қанағаттандыратын [a,b]-да жататын жалғыз шешімге жинақталатын $x_{n+1} = \frac{x_n - f(x_n)}{f'(x_n)}$ n = 0,1,2,... итерациялық тізбек құруға болады.

Ньютон әдісінің геометриялық мағынасы: координаталары $(x_n;f(x_n))$, болатын нүктеден қисыққа жанама жүргізсек, оның ох өсімен қиылысу нүктесі теңдеудің түбіріне x_{n+1} – кезекті жуықтау болып табылады.

Түбірге n-ші жуықтаудың қателігін бағалау үшін келесі теңсіздіктің орындалуын қадағалау керек: $|\xi - x_n| \le \frac{M_2}{2m_1}|x_n - x_{n-1}|^2$. Мұндағы M_2 – функцияның екінші ретті туындысының аралықтағы максимумы, m_1- минимумы. Егер, $|x_n - x_{n-1}| < e$ болса, онда $|\xi - x_n| \le \frac{M_2 \cdot e^2}{2m_1}$ болады, яғни түбірге дұрыс жуықталынса, әр итерациядан кейін кезекті жуықтаудың ондық таңба саны екіге артады да процесс тез жинақталады. Егер түбірді берілген e дәлдікпен табу керек болса, итерациялық процесті $|x_n - x_{n-1}| < e_0 = \sqrt{\frac{2m_1 e}{M_2}}$ шарты орындалғанша жалғастырамыз.

Бұл біртіндеп жуықтау әдісі деп аталады. Әдістің жинақталу жылдамдығы x_0 бастапқы нүктені дұрыс таңдауға байланысты. Егер итерация процесінде функцияның туындысы нөлге тең болса, қисыққа жүргізілген жанама x осіне параллель болса, онда бұл әдісті қолдану қиындайды. Сол сияқты функцияның екінші ретті туындысының мәні шексіз үлкен болса және функцияның өзі бірінші ретті туындысы нөлге тең болса, онда шыққан түбірлер еселі болып, жинақталмауы мүмкін. Бұл әдісті қолдану үшін $f(x)$ функциясы үзіліссіз және дифференциалданған болуы керек.

x_0 бастапқы жуықтауды таңдалынған уақытта құрылатын тізбек монотонды кемімелі болуы керек.

$$\left|f(x_{n+1})\right| \le \left|f(x_n)\right|$$

Алгоритмі:

1 Қисықтың бойынан қандайда бір x_0 нүктесін таңдап, осы нүкте арқылы қисыққа жанама жүргізіледі.

2 Жанама x осін қиған кезде табылған нүктенің мәні мына формуламен есептелінеді.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \neq 0 \tag{2.5}$$

Табылған нүктедегі функцияның мәні нөлге өте жуық болса, онда сол нүкте (2.1) теңдеудің түбірі, болмаса процесс жалғасады.

Егер түбірлер еселі болса, ол еселікті P деп белгілейік.

$$x_{n+1} = x_n - P\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \neq 0 \tag{2.6}$$

3.2.2 Хорда әдісі

Бұл әдіс кесіндіні қаққа бөлу әдісіне қарағанда шешімге тез жинақталады.

Алгоритмі:

1 x_n , x_{n+1} аралығында f (x) және f (x_{n+1}) функцияларының таңбасы бір біріне қарама-қарсы және түбірі бар болсын.

2 Осы екі шеткі нүктеден хорда жүргізіп, хорданың x осімен қиылысқан нүктесін мына формуламен анықтаймыз.

$$x^* = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}(x - x_n) + f(x_n) \tag{2.4}$$

Егер f(a)>0 шарты орындалса, a нүктесі тұрақты болады да $x^* = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$ формуласымен есептеледі

Егер f(b)>0 шарты орындалса, b нүктесі тұрақты болады да $x^* = b - f(b)\frac{a-b}{f(a)-f(b)}$ формуласымен есептеледі

3 x^* нүктесіндегі функция мәнін F(x^*)-ны есептеу. Оның таңбасын екі шеткі нүктедегі функцияның таңбасымен салыстырылады. Егер f (x_n) және f(x^*) функциясының таңбасы бірдей болса, онда хорданы x_{n+1} және x^* нүктесі арқылы жүргізіледі. Оның мәнін (2.4) формуламен табады. Егер f(x_{n+1}) мен f(x^*) функцияның таңбалары бірдей болса, онда хорданы x_n және x^* нүктесі арқылы жүргізіледі. Шыққан нүктенің мәні (2.4) формуламен есептелінеді.

4 x^* нүктедегі мәнін есептеп, мәні нөлге жуық болса $|x_k - x_{k-1}| < e$, онда x^* нүктесі (2.1) теңдеудің түбірі деп аталады. Егер нөлге жуық болмаса, онда процесс жалғасады.

Алдындағы мысал үшін программасы келесідей болады:

3.2.3 Жай итерация әдісі

Бұл әдісті қолдану үшін (2.1)-ші теңдеудің сызықты мүшесі айшықталып мына түрге келтіру керек:

$$x = \varphi(x) \tag{2.3}$$

Сосын теңдеудің түбіріне кез келген X_0 бастапқы жуықтау беріп $x_k = \varphi(x_{k-1})$ k=1,2,… формуласымен x_1, x_2,…,x_n нүктелер тізбегін құрамыз. Бұл тізбек x=z түбіріне жинақталуы керек. Егер $\lim X_k = z$ болса, онда z нүктесі $x = \varphi(x)$ теңдеуінің түбірі бола алады. Итерация әдісінің жинақтылық шарты $|\varphi'(x)| < 1$ және бастапқы жуықтау кез келген болады. Итерациялық процесс берілген дәлдікке жетуі үшін $|x_k - x_{k-1}| < e\frac{1-q}{q}$ шарты орындалуы керек.

Итерациялық тізбектің жинақтылығы теореманың ([1] қараңыз) шарттарымен де тексерілуі керек:

Теорема1.2.:

$x = \varphi(x)$ теңдеуінің [a,b] аралығында жалғыз түбірі бар және келесі шарттар орындалсын:

1 $\varphi(x)$ функциясы [a,b] аралығында анықталған және дифференциалданады;

2 $x \in [a,b]$ үшін $\varphi(x) \in [a,b]$;

3 барлық $x \in [a,b]$ үшін $|\varphi'(x)| \le q < 1$ болатындай q саны табылсын,

онда $x_k = \varphi(x_{k-1})$, (k=1,2,…) итерациялық тізбегі $x_0 \in [a,b]$ кез келген бастапқы жуықтауда жинақталады.

Теңдеуді итерациялық түрге келтіру

(2.1)-теңдеуді (2.3)-ші итерациялық түрге келтіру әртүрлі тәсілдермен орындалады. Қай тәсілмен итерациялық түрге келтірілсе де жоғарыдағы теореманың шарттары орындалуы керек. Практикада көрінгендей, теореманың 3)-ші шартының орындалуы күрделірек, сондықтан төмендегі тәсілдердің бірін қолдануға болады:

1 (2.1)-теңдеуді $x = x - m \cdot f(x)$ түріне келтірейік, мұндағы m=const нөлден өзгеше. Бұл уақытта $\varphi(x) = x - m \cdot f(x)$ деуге болады. Оны дифференциалдасақ: $\varphi'(x) = x - m \cdot f'(x)$. Теореманың 3)-ші шарты орындалуы үшін $x \in [a,b]$ үшін $m \cdot f(x) \le 1$ шарты орындалатындай етіп m-ді таңдап алу керек.

2 (2.1)-теңдеу (2.3)-ші түрге келтірілген, бірақ теореманың 3)-ші шарты орындалмай тұрса, онда y=$\varphi(x)$ функциясының орнына x=g(y) функциясын қарастыруға болады. Мұндағы g(y) функциясы $\varphi(x)$ функциясының кері

функциясы. Енді y=g(y) теңдеуін шешетін боламыз. Немес ескі белгілеулер бойынша x=g(x) теңдеуін шешеміз деген сөз. Кері функциялардың туындыларының қасиеттері бойынша $\left|g'(x)\right| = \frac{1}{\left|\varphi'(x)\right|} < 1$.

2 – мысал

$e^{x} - 10 \cdot x = 0 \quad (-\infty;+\infty)$ теңдеуінің түбірін қарапайым итерация әдісімен табу керек болсын. Теңдеуді итерациялық түрге келтіреміз:

$\varphi'(x) = 0.1e^{x},\ \varphi'(x) > 0$ Ал $\varphi(x) = 0.1e^{x}$ және барлық x нүктелері үшін $\left|\varphi'(x)\right| = \left|0{,}1e^{x}\right| \le 0{,}1 < 1$. Яғни q=0,1 деп алып, бастапқы жуықтауды $x_0=0$ десек $\left|x_k - x_{k-1}\right| < e$ шарты орындалғанша итерациялық процесті құрамыз: $x_0=0$: $x_1 = 0{,}1e^{0} = 0{,}1$; $x_2 = 0{,}1e^{0{,}1} = 0{,}01$, т.с.с. Түбір мәні $x_6=0{,}111833$, итерация саны 5-ке тең.