Қазақстан Республикасының
білім және ғылым
министрлігі

Д.Серікбаев атындағы
ШҚМТУ

Министерство
образования и науки
Республики Казахстан

ВКГТУ им.Д.Серикбаева

В.Н.Сидоренко

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И РЯДЫ

ЛЕКЦИИ

для студентов специальности 050704 «Вычислительная техника» заочной формы обучения на базе среднего специального образования (*дистанционная технология обучения*)

Өскемен
Усть-Каменогорск
2011

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1 Дифференциальные уравнения (основные понятия).

Определение. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные $y', y'', ..., y^{(n)}$.

Символически дифференциальное уравнение записывают в виде

$$F(x, y, y', y'', ... y^{(n)}) = 0$$

или

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ... \frac{d^{(n)}y}{dy^{(n)}}\right) = 0.$$

Если неизвестная функция $y = y(x)$ зависит только от одной переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным* .

Определение. *Порядком* дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в это уравнение.

Например,

$y' + xy = x^2$ – дифференциальное уравнение первого порядка,

$y'' - 5y' + 4y = \cos 2x$ – дифференциальное уравнение второго порядка и т.д.

Определение. *Решением* или *интегралом* дифференциального уравнения называется всякая функция $y = y(x)$, которая при подстановке ее в уравнение, обращает это уравнение в верное равенство.

Пример. Функция $y = e^{\frac{x^2}{2}}$ является решением уравнения

$$y' - xy = 0.$$

Действительно, т.к. $y' = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)' = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x$,

то

$$y' - xy = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x - x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \equiv 0, \text{ при любом значении } x \in \mathrm{R}.$$

Это означает, что функция $y = e^{\frac{x^2}{2}}$ является решением данного дифференциального уравнения.

§ 2 Дифференциальные уравнения первого порядка.

2.1 Основные понятия.

Определение. *Обыкновенным дифференциальным уравнением* (или просто дифференциальным уравнением) первого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (1)$$

которое связывает три переменные величины – независимую переменную, неизвестную функцию и ее производную. Если уравнение (1) можно разрешить относительно y', то оно принимает вид:

$$y' = f(x, y) \qquad (2)$$

и называется уравнением первого порядка, *разрешенным относительно производной*.

В некоторых случаях дифференцированное уравнение первого порядка бывает удобно записать в виде

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0, \qquad (3)$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ - заданные функции.

Определение. *Решением* дифференциального уравнения (1) называется любая непрерывно дифференцируемая функция $y = y(x)$, определенная на некотором интервале **(**a, b**)**, которая удовлетворяет этому уравнению:

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0, \; x \in (a, b).$$

График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой* этого уравнения.

Дифференциальное уравнение первого порядка, вообще говоря, имеет бесконечное множество решений. Чтобы из всей совокупности решений выделить какое-либо отдельное решение, необходимо задать, так называемые, начальные и краевые условия.

Определение. Условия, в силу которых решение $y = y(x)$ уравнения принимает заданное значение y_0 в заданной точке x_0, называются *начальными условиями* и записываются обычно так:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 \text{ или } y(x_0) = y_0 . \qquad (4)$$

Определение. Отыскание решения уравнения (1) (или (2) или (3)) удовлетворяющего начальным условиям (4) называется *задачей Коши* или *начальной задачей*.

С геометрической точки зрения решить задачу Коши – означает из всего множества интегральных кривых выделить ту, которая проходит через точку (x_0, y_0) плоскости Oxy.

Теорема 1. (теорема Коши). Если в уравнении (2) функция $f(x,y)$ и ее частная производная $f'_y(x,y)$ определены и непрерывны в некоторой области G плоскости Oxy, то какова бы ни была внутренняя точка (x_0, y_0) области G, существует единственное решение $y = y(x)$ данного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям (4).

Определение. *Общим решением* дифференциального уравнения первого порядка в области G называется функция $y = \varphi(x, c)$, где c - произвольная постоянная, если данная функция является решением этого уравнения при любом значении постоянной c и для любой точки $(x_0, y_0) \in \mathbf{G}$ найдется единственное значение $c = c_0$ такое, что функция $y = \varphi(x, c_0)$ удовлетворяет данным начальным условиям:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 .$$

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, c_0)$, которая получается из общего решения $y = \varphi(x, c)$ при определенном значении постоянной $c = c_0$.

Общее решение дифференциального уравнения, полученное в неявном виде, называется *общим интегралом* этого уравнения. Аналогично определяется *частный интеграл* уравнения.

Таким образом, при решении дифференциального уравнения может быть найдено либо общее решение (общий интеграл), либо частное решение (частный интеграл) уравнения.

Поэтому, *решить* или *проинтегрировать* дифференциальное уравнение означает:

1) найти его общее решение или общий интеграл или
2) найти то частное решение, которое удовлетворяет заданным начальным условиям.

2.2 Дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными и разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0, \tag{5}$$

называется уравнением с *разделенными переменными*.

Уравнение (5) представляет собой сумму дифференциалов по соответствующим переменным. Интегралы от них будут отличаться на постоянную. Поэтому общий интеграл уравнения (5) будет иметь вид

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = 0 . \tag{6}$$

Пример. Решить дифференциальное уравнение первого порядка

$$(2x+1)dx + \frac{dy}{y+1} = 0 .$$

Решение. Очевидно, что это уравнение вида (5) . Интегрируем обе части равенства, получим общий интеграл уравнения

$$\int (2x+1)dx + \int \frac{dy}{y+1} = 0, \qquad x^2 + x + \ln|y+1| = C.$$

Если из последнего равенства выразить *y,* то получим общее решение

$$y = Ce^{-(x^2+x)} - 1.$$

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение вида

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0. \tag{7}$$

Очевидно, что делением обоих частей уравнения (7) на выражение

$$N_1(y)M_2(x)$$

получим уравнение

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0,$$

которое является уравнением с разделенными переменными (5).

Поэтому уравнение вида (7) называется уравнением с *разделяющимися переменными*.

Рассмотрим, далее, уравнение вида

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y). \tag{8}$$

Т.к. $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то уравнение (8) может быть записано в виде

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y) \Rightarrow \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$$

Последнее уравнение является уравнением с разделенными переменными. Это означает, что уравнение вида (8) также является уравнением с разделяющимися переменными.

Интегрируя это равенство, получим общее решение уравнения (8) в виде

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + c.$$

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{y'}{x} + x \cdot y^2 + x = 0.$$

Решение. Чтобы установить тип данного уравнения, выразим из него y'.

Получим

$$y' + x^2y^2 + x^2 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; y' = -x^2y^2 - x^2 \;\; \Rightarrow \;\; y' = -x^2(y^2+1).$$

Это уравнение вида (8), т.е. с разделяющимися переменными.

Заменим y' на $\frac{dy}{dx}$ и выполним преобразования,

получим

$$\frac{dy}{dx} = -x^2 \cdot (y^2+1) \Rightarrow dy = -x^2 \cdot (y^2+1)dx \Rightarrow \frac{dy}{y^2+1} = -x^2 dx$$

,

уравнение с разделенными переменными. Интегрируем обе его части

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int (-x^2)dx + c \Rightarrow arctgy = -\frac{x^3}{3} + c \ .$$

Окончательно, общий интеграл уравнения (общее решение) имеет вид

$$arctgy = -\frac{x^3}{3} + c \quad \text{или} \quad y = tg(c - \frac{x^3}{3}).$$

2.3 Однородные уравнения первого порядка.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x, y). \tag{9}$$

Определение. Функция $f(x,y)$ называется *однородной n – го измерения* относительно своих аргументов x и y, если для любого значения параметра t (кроме нуля) выполняется тождество:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

В частности, если выполняется равенство

$$f(tx, ty) = t^0 f(x, y) = f(x, y),$$

то функция $f(x,y)$ – однродная нулевого порядка.

Пример. Проверить на однородность функцию $f(x, y) = x^3 + 3x^2 y$.

Решение. Подставим в функцию вместо x и y выражения tx и ty

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2 ty = t^3x^3 + 3t^3x^2y = t^3(x^3 + 3x^2y) = t^3 f(x, y).$$

Таким образом, функция $f(x, y)$ является однородной 3- го порядка.

Определение. Дифференциальное уравнение вида (9) называется *однородным*, если его правая часть $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Пусть уравнение (9) является однородным.

Т.к. функция $f(x,y)$ – однородная нулевого измерения, то можно записать:

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Предположим, что $t = \frac{1}{x}$. Получаем:

$$f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right)$$

Правая часть полученного равенства зависит фактически только от одного аргумента

$$u=\frac{y}{x}, \tag{10}$$

т.е.

$$f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=\varphi(u);$$

Из (10) получим

$$y=ux,\ y'=u'x+ux'. \tag{11}$$

Тогда исходное уравнение (9) будет иметь вид

$$u'x+ux'=\varphi(u);$$

Элементарное преобразование приводит его виду с разделяющимися переменными

$$u'x+u=\varphi(u)\Rightarrow\quad u'=\frac{\varphi(u)-u}{x}.$$

В результате, получили уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции u.

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}\quad\Rightarrow\quad\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+C.$$

Далее, найдя интегралы и заменив функцию u на ее выражение через x и y, получим общее решение однородного дифференциального уравнения.

Замечание. Любое уравнение вида

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

является однородным, если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции одинакового измерения.

Пример. Решить уравнение $y'=\frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x}+1\right)$.

Решение. Введем вспомогательную функцию u ,

$$u=\frac{y}{x};\quad y=ux;\quad y'=u'x+u.$$

Отметим, что введенная нами функция u всегда положительна, т.к. в противном случае теряет смысл исходное дифференциальное уравнение, содержащее $\ln u=\ln\frac{y}{x}$.

Подставляем в исходное уравнение:

$$u'x+u=u(\ln u+1)\ \Rightarrow\quad u'x+u=u\ln u+u\ \Rightarrow\quad u'x=u\ln u\ .$$

Разделяем переменные:

$$\frac{du}{u\ln u}=\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{du}{u\ln u}=\int\frac{dx}{x}$$

Интегрируя, получаем:

$$\ln\left|\ln u\right|=\ln\left|x\right|+C \quad \Rightarrow \quad \ln u=Cx \quad \Rightarrow \quad u=e^{Cx}.$$

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции y, получаем общее решение:

$$y=xe^{Cx}.$$

2.4 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если оно линейно относительно неизвестной функции и ее производной, т.е. содержит y и y' в первой степени.

Линейное уравнение первого порядка может быть записано в виде

$$y'+P(x)\cdot y=Q(x). \tag{12}$$

Линейные уравнения вида (12) решаются методом Бернулли. Решение такого уравнения ищется в виде произведения двух функций

$$y(x) = u(x)\cdot v(x) \tag{13}$$

Из (13) следует, что

$$y'(x)=u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x). \tag{14}$$

Подставим (13) и (14) в уравнение (15) и сгруппируем слагаемые, получим

$$u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)+P(x)u(x)\cdot v(x)=Q(x),$$

$$u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot(v'(x)+P(x)\cdot v(x))=Q(x).$$

Для определения функций $u(x)$ и $v(x)$ запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} v'(x)+P(x)\cdot v(x)=0 \\ u'(x)\cdot v(x)=Q(x) \end{cases}. \tag{15}$$

Оба уравнения системы являются уравнениями с разделяющимися переменными, решая их найдем функции $u(x)$ и $v(x)$. Затем подставим их выражения в формулу (13) и получим, таким образом, решение уравнения (12).

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$x^2y'+x\cdot y=1$$

удовлетворяющее начальным условиям : $y(1)=3$.

Решение. Данное уравнение приведем к виду

$$y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2}\,.$$

Это линейное уравнение вида (12), решаем его методом Бернулли

$$y(x) = u(x)\cdot v(x), \quad y'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

Получим

$$u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) + \frac{1}{x} uv = \frac{1}{x^2} \quad => \quad u'(x)\cdot v(x) + u(x)\left(v'(x) + \frac{1}{x} v \right) = \frac{1}{x^2} \quad =>$$

$$=> \begin{cases} v'(x) + \dfrac{1}{x}\cdot v(x) = 0 \\ u'(x)\cdot v(x) = \dfrac{1}{x^2} \end{cases}.$$

Из первого уравнения найдем функцию $v(x)$

$$v' + \frac{1}{x} v = 0 \quad => \quad \frac{dv}{dx} + \frac{1}{x} v = 0 \quad => \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x} v \quad => \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \quad =>$$

$$=> \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x} \quad => \quad \ln v = -\ln x \quad => \quad v = \frac{1}{x}\ .$$

Подставим найденное v(x) во второе уравнение системы и найдем функцию $u(x)$:

$$u'\cdot v = \frac{1}{x^2} \quad => \quad u'\cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \quad => \quad u' = \frac{1}{x} \quad => \quad u = \ln x + \text{c}.$$

Тогда общее решение уравнения будет иметь вид

$$y = \frac{1}{x}\left(\ln x + c\right)\ .$$

Найдем частное решение уравнения, удовлетворяющее условию $y(1)=3$.

Т. к. $y = 3$ при $x = 1$, то из общего решения получим

$$3 = \frac{1}{1}\left(\ln 1 + c\right) \quad => \quad c = 3.$$

Следовательно, частным решением уравнения, удовлетворяющим начальному условию, будет функция

$$y = \frac{1}{x}\left(\ln x + 3\right).$$

2.5 Уравнение Бернулли.

Определение. *Уравнением Бернулли* называется дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n, \tag{16}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – функции или постоянные числа, а n – постоянное число ($n \neq 1$).

Общее решение уравнения вида (16) может быть найдено методом Бернулли аналогично линейному уравнению (см. 2.4), т.е. решение этого уравнения также ищется в виде $y = u(x) \cdot v(x)$.

Пример. Решить уравнение

$$xy' + y = x \cdot y^2 \ln x .$$

Решение. Полагаем $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, $y'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

Получим

$$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) + \frac{1}{x} uv = (uv)^2 \cdot \ln(\mathrm{x}) \quad =>$$

$$=> \; u'(x) \cdot v(x) + u(x)\left(v'(x) + \frac{1}{x} v \right) = (uv)^2 \ln x \quad =>$$

$$=> \begin{cases} v'(x) + \frac{1}{x} \cdot v(x) = 0 \\ u'(x) \cdot v(x) = (uv)^2 \ln x \end{cases} .$$

Из первого уравнения, аналогично предыдущему примеру, функция $v(x)$ будет равна

$$v = \frac{1}{x} .$$

Второе уравнение, в этом случае, будет иметь вид

$$u' = u^2 \frac{1}{x} \ln x .$$

Решив уравнение с разделяющимися переменными, найдем $u(x)$

$$u(x) \cdot = -\frac{2}{\ln^2 x + c}.$$

Подставляем найденные функции $u(x)$ и $v(x)$ в выражение для y, получим общее решение уравнения

$$y(x) \cdot = -\frac{2}{x(\ln^2 x + c)}.$$

2.6 Уравнение первого порядка в полных дифференциалах

Рассмотрим уравнение вида

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

(17)

Определение. Дифференциальное уравнение первого порядка вида (17) называется уравнением в *полных дифференциалах*, если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$
удовлетворяют условию

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \ . \qquad (18)$$

Можно показать, что при выполнении условия (18) правая часть уравнения (17) является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, т.е.

$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy \ .$$

Поэтому интегрирование такого уравнения сводится к определению такой функции $u(x,y)$ из условия

$$du = 0.$$

Пусть $M_0(x_0\, ,\, y_0)$ – точка, в окрестности которой существует решение дифференциального уравнения (17), тогда общий интеграл уравнения находится по формуле

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C$$

или

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C. \qquad (19)$$

Пример. Решить уравнение

$$(3x^2 + 10xy)dx + (5x^2 - 1)dy = 0$$

Решение. Проверим выполнение условия (18):

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 10xy) = 10x, \qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(5x^2 - 1) = 10x \ .$$

Условие (18) выполняется, следовательно, исходное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Решаем его по формуле (19). Получим

$$\int\limits_{x_0}^{x} (3x^2 + 10xy)dx + \int\limits_{y_0}^{y} (5x_0^2 - 1)dy = C \ =>$$

$$=> \quad (x^3 + 5x^2y)\Big|_{x_0}^{x} + (5x_0^2 - 1)y\Big|_{y_0}^{y} = C \ =>$$

$$=> (x^3 + 5x^2y) - (x_0^3 + 5x_0^2y) + (5x_0^2 - 1)y - (5x_0^2 - 1)y_0 = C \ =>$$

$$=> \quad x^3 + 5x^2y - x_0^3 - 5x_0^2y + 5x_0^2y - y - 5x_0^2y_0 - y_0 = C \ =>$$

$$=> \quad x^3 + 5x^2y - y = C - x_0^3 + 5x_0^2y_0 + y_0 \ .$$

Так как правая часть в полученном решении является константой, то ее можно обозначить одной буквой C и, окончательно получим решение уравнения в виде

$$x^3 + 5x^2y - y = \text{C}.$$

§ 3 Дифференциальные уравнения высших порядков

3.1 Основные понятия.

Определение. *Дифференциальным уравнением порядка* n называется уравнение вида

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{20}$$

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}). \tag{21}$$

Так же как и уравнение первого порядка, уравнения высших порядков имеют бесконечное количество решений.

Определение. Решение $y = y(x)$ удовлетворяет начальным условиям

$$x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)},$$

если

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad .... \quad , \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{22}$$

Определение. Нахождение решения уравнения (20) или (21), удовлетворя- ющего начальным условиям $x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$, называется *задачей Коши*.

Теорема Коши. (Теорема о необходимых и достаточных условиях существования решения задачи Коши).

Если функция (n – 1) –ой переменных вида $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ в некоторой области D (n – 1) – мерного пространства непрерывна и имеет непрерывные частные производные по $y, y', ..., y^{(n-1)}$, то какова бы не была точка $(x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)})$ в этой области, существует единственное решение $y = y(x)$ уравнения (21), определенного в некотором интервале, содержащем точку x_0, удовлетворяющее начальным условиям (22).

Общее решение дифференциальноего уравнения n порядка зависит от n произвольных постоянных и имеет вид

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots C_n).$$

Если заданы начальные условия (22), то произвольные постоянные однозначно определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2, ..., C_n) \\ y_0' = \varphi'(x_0, C_1, C_2, ..., C_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, ..., C_n) \end{cases}$$

и, подставив найденные значения произвольных постоянных в общее решение, получим частное решение

$$y_0 = \varphi(x_0, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0).$$

3.2 Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям.

3.2.1 Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Если $f(x)$ – функция непрерывная на некотором промежутке $a < x < b$, то решение может быть найдено n – кратным последовательным интегрированием

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx \int f(x)dx + C_1 x + C_2;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y = \int dx \int dx .... \int f(x)dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n.$$

Пример. Решить уравнение

$$y''' = e^{2x}$$

с начальными условиями $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $y_0' = -1$; $y_0'' = 0$.

Решение. Интегрируя обе части уравнения, получим уравнение относительно второй производной

$$y'' = \int e^{2x} dx + C_1 = \frac{1}{2} e^{2x} + C_1.$$

Интегрируя еще дважды, получим функцию $y = \varphi(x, C_1, C_2, C_3)$, являющуюся общим решением

$$y' = \int\left(\frac{1}{2} e^{2x} + C_1\right)dx = \frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2;$$

$$y = \int\left(\frac{1}{4} e^{2x} + C_1 x + C_2\right) = \frac{1}{8} e^{2x} + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3;$$

Подставим начальные условия:

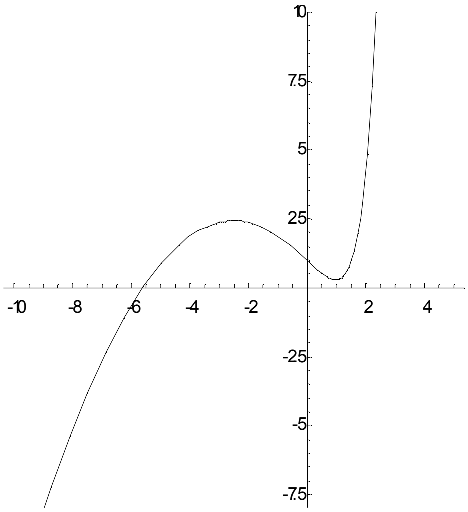
$$1 = \frac{1}{8} + C_3; \quad -1 = \frac{1}{4} + C_2; \quad 0 = \frac{1}{2} + C_1;$$

$$C_1 = -\frac{1}{2}; \quad C_2 = -\frac{5}{4}; \quad C_3 = \frac{7}{8};$$

Получаем частное решение (решение задачи Коши):

$$y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}.$$

Ниже показана интегральная кривая данного дифференциального уравнения.



3.2.2 Уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка $k - 1$ включительно.

Расмотрим уравнение вида

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0, \tag{23}$$

которое не содержит *явно* неизвестную функцию y и ее производные до k – го порядка. В уравнениях такого типа возможно понижение порядка на k единиц. Для этого производят замену переменной:

$$y^{(k)} = p(x), \quad y^{(k+1)} = p'(x), \quad ... \quad y^{(n)} = p^{(n-k)}(x).$$

В результате получается уравнение $(n-k)$ – го порядка

$$F(x, p, p', ..., p^{(n-k)}) = 0.$$

Если общее решение полученного уравнения может быть найдено

$$p = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k}),$$

то делая обратную замену, получим уравнение вида 3.2.1

$$y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k}).$$

Интегрируя это уравнение последовательно k раз, получим общее решение исходного уравнения

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n).$$

В частности, если дано уравнение второго порядка вида

$$F(x, y', y'') = 0, \tag{24}$$

то с помощью замены неизвестной функции

$$y' = p(x), \quad y'' = p',$$

оно приводится к уравнению первого порядка относительно функции $p(x)$

$$F(x, p, p') = 0.$$

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y''' = \frac{y''}{x}.$$

Решение. Сделаем замену $p = y''$, $p' = y'''$.

Получим уравнение первого порядка

$$p' = \frac{p}{x}.$$

Решая его, получим

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x}, \quad \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln|p| = \ln|x| + \ln C_1, \quad p = C_1 x.$$

Произведя обратную замену, получаем уравнение второго порядка, которое интегрируем дважды

$$y'' = C_1 x; \qquad y' = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2;$$

$$y = \int \left(\frac{C_1}{2} x^2 + C_2 \right) dx = \frac{C_1}{6} x^3 + C_2 x + C_3;$$

Таким образом, общим решением исходного дифференциального уравнения будет

$$y = Cx^3 + C_2 x + C_3;$$

Необходимо отметить, что это соотношение является решением для всех значений переменной x кроме значения $x = 0$.

3.2.2 Уравнения, не содержащие явно независимой переменной.

К таким уравнениям относятся уравнения вида

$$F(y, y', y'') = 0. \tag{25}$$

Порядок таких уравнений может быть понижен с помощью замены перемен-ных $y' = p(y)$.

Из последнего равенства получим

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dy}(y') \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p\,.$$

Таким образом, в уравнении (25) выполняется замена

$$\begin{cases} y' = p(y) \\ y'' = \dfrac{dp}{dy} \cdot p \end{cases}. \tag{26}$$

В результате замены получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$F\left(y, p, \frac{dp}{dy} p \right) = 0\,.$$

Если это уравнение проинтегрировать, и

$$\Phi(y, p, C_1) = 0$$

общее решение этого уравнения, то общее решение исходного уравнения находится из уравнения первого порядка

$$\Phi(y, y', C_1) = 0\,.$$

Пример. Найти общее решение уравнения

$$yy'' - (y')^2 - 4yy' = 0.$$

Решение. Сделаем замену (26)

$$p = y', \qquad y'' = \frac{dp}{dy} p.$$

После замены получим уравнение

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 - 4yp = 0, \qquad p\left(y\frac{dp}{dy} - p - 4y \right) = 0,$$

которое распадается на два уравнения.

а) $y\dfrac{dp}{dy} - p - 4y = 0, \qquad \dfrac{dp}{dy} = 4 + \dfrac{p}{y}.$

Это уравнение является однородным первого порядка (9), которое решается с помощью замены $u = \dfrac{p}{y}$,

$$u + \frac{du}{dy} y = 4 + u \quad => \quad du = 4\frac{dy}{y} \quad => \quad \int du = 4\int \frac{dy}{y} \quad => \quad u = 4\ln|y| + 4\ln C_1$$

$$=> => \quad u = 4\ln|C_1 y| \quad => \quad p = 4y\ln|C_1 y|\,.$$

С учетом того, что $p=\dfrac{dy}{dx}$, получаем уравнение

$$\frac{dy}{dx}=4y\ln\left|C_1y\right|,$$

из которого получим

$$\int\frac{dy}{4y\ln\left|C_1y\right|}=\int dx \quad => \; x=\frac{1}{4}\int\frac{d(\ln\left|C_1y\right|)}{\ln\left|C_1y\right|}=\frac{1}{4}\ln\left|\ln\left|C_1y\right|\right|+C_2 \; .$$

Таким образом, общий интеграл уравнения а) имеет вид:

$$\ln\left|\ln\left|\mathrm{C_1 y}\right|\right|=4\mathrm{x}+\mathrm{C};$$

б) $p=0.$

Из этого уравнения получим,

$$y'=0 \quad => \; y=C.$$

Окончательно, исходное уравнение имеет два общих решения

$$\ln\left|\ln\left|C_1y\right|\right|=4x+C\,, \quad y=C.$$

3.3 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка.

3.3.1 Основные понятия.

Определение. Уравнения вида

$$y''+p(x)\cdot y'+q(x)\cdot y=f(x), \tag{27}$$

где $y(x)$ – искомая функция, $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ – непрерывные на некотором интервале $(a\,;\,b)$ функции, называется *линейным дифференциальным уравнением второго порядка.*

Если $f(x)=0$, то уравнение (27) имеет вид

$$y''+p(x)\cdot y'+q(x)\cdot y=0$$

(28)

и называется *линейным однородным* уравнением.

Если $f(x)\neq 0$, то уравнение (27) называется *линейным неоднородным.*

Определение. Две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются *линейно независимыми* на $(a\,;\,b)$, если для любого $x\in(a\,;\,b)$ выполняется

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq const\,.$$

Теорема 3. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - два линейно независимых решения однородного уравнения (28), то функция

$$y=c_1y_1(x)+c_2y_2(x), \tag{29}$$

где c_1 и c_2 - произвольные постоянные, является его общим решением.

Теорема 4. Если $\bar{y}(x)$ - общее решение однородного уравнения (28), а $y^*(x)$ - какое-либо частное решение неоднородного уравнения (27), то их сумма

$$y = \bar{y}(x) + y^*(x) \tag{30}$$

является общим решением неоднородного уравнения (27).

3.3.2 Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим линейное однородное уравнение второго порядка

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0 \tag{31}$$

где p, q – действительные числа, которое называется линейным однородным уравнением с постоянными коэффициентами. Из теоремы 3 следует, чтобы найти общее решение уравнения (31), достаточно найти два его частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, которые образуют фундаментальную систему решений. В этом случае общее решение уравнения (31) будет иметь вид (29).

Поставим в соответствие уравнению (31) алгебраическое уравнение

$$k^2 + p \cdot k + q = 0, \tag{32}$$

которое называется характеристическим уравнением уравнения (31).

В области комплексных чисел характеристическое уравнение (32) имеет два корня, которые обозначим через k_1 и k_2.

Теорема 5.

1) Если корни характеристического уравнения действительные и различные ($k_1 \neq k_2$), то частными решениями уравнения (31) являются функции

$$y_1(x) = e^{k_1 x} \text{ и } y_2(x) = e^{k_2 x},$$

а общее решение имеет вид

$$y(x) = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}; \tag{33}$$

2) Если корни характеристического уравнения действительные и равные ($k_1 = k_2 = k$), то частными решениями уравнения (31) являются функции

$$y_1(x) = e^{kx} \text{ и } y_2(x) = x \cdot e^{kx},$$

а общее решение имеет вид

$$y(x) = e^{kx}(c_1 + c_2 x); \tag{34}$$

3) Если корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные ($k_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \beta \neq 0$), то частными решениями уравнения (31) являются

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos\beta x \text{ и } y_2(x) = e^{\beta x} \sin\beta x,$$

а общее решение имеет вид

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x). \qquad (35)$$

3.3.3 Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим уравнение вида

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x) \qquad ,$$

(36)

где p, q – действительные числа и $f(x) \neq 0$. Оно называется линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Из теоремы 4 следует, чтобы найти общее решение уравнения (36), необходимо, кроме общего решения вида (29) (см. формулы (33)-(35)), найти какое-либо частное решение $y^*(x)$ уравнения (36). Оно может быть найдено методом вариации произвольных постоянных [3]. Однако, в некоторых частных случаях, когда правая часть уравнения $f(x)$ имеет специальный вид, частное решение может быть найдено методом неопределенных коэффициентов.

Если правая часть уравнения (36) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x), \qquad (37)$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n, тогда частное решение $y^*(x)$ ищется в виде

$$y^*(x) = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot Q_n(x), \qquad (38)$$

где $Q_n(x)$- многочлен с неизвестными коэффициентами той же степени, что и $P_n(x)$, r - число корней характеристического уравнения совпадающих с числом α.

Если правая часть уравнения (36) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}(a \cdot \cos\beta x + b \cdot \sin\beta x), \qquad (39)$$

тогда частное решение $y^*(x)$ ищется в виде

$$y^*(x) = x^r \cdot e^{\alpha x}(A \cdot \cos\beta x + B \cdot \sin\beta x), \qquad (40)$$

r - число корней характеристического уравнения совпадающих с числом $\alpha + i\beta$, A и B – неизвестные постоянные.

Постоянные A и B или коэффициенты многочлена $Q_n(x)$ определяются подстановкой $y^*(x)$, $y^{*\prime}(x)$, $y^{*\prime\prime}(x)$ в левую часть уравнения (36).

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' - 2y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$$

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным второго порядка с постоянными коэффициентами (36) .

Вначале находим общее решение. соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Для этого запишем и решим характеристическое уравнение

$$k^2 - 2k + 2 = 0 \ .$$

Дискриминант этого уравнения равен

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 = -4.$$

Тогда корни уравнения будут равны

$$k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i, \ \alpha = 1, \beta = 1.$$

Корни характеристического уравнения – комплексные числа. В этом случае частными линейно-независимыми решениями будут

$$y_1(x) = e^x \cos x \ , \ \ y_2(x) = e^x \sin x \, .$$

Они образуют фундаментальную систему решений, поэтому общее решение однородного уравнения (см. формулу 35) запишется в виде:

$$y(x) = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x) \, .$$

Далее, находим частное решение исходного уравнения $\bar{y}$.

Т.к. правая часть уравнения содержит произведение многочлена второй степени $(x^2 + x)$ на e^{3x}, то частное решение $\bar{y}$ будем искать в виде (38) произведения многочлена второй степени на e^{3x} , а именно:

$$\bar{y} = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}.$$

Для определения коэффициентов A, B, C, дважды дифференцируем $\bar{y}$ и подставляем значения $\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}''$ в исходное уравнение. После сокращения на e^{3x} и приведения подобных членов получим равенство:

$$2Ax^2 + (6A + 2B)x + (2A + 3B + 2C) = x^2 + x \, .$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обоих частях равенства, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 6A + 2A = 1 \\ 2A + 3B + 2C = 0. \end{cases}$$

Отсюда: A = 1/2, B = –1, C = 1.

Таким образом, частное решение уравнения $\bar{y}$ будет иметь вид:

$$\bar{y} = (\frac{1}{2}x^2 - x + 1)e^{3x}.$$

Тогда общее решение данного неоднородного дифференциального уравнения запишется в виде (40):

$$y = e^x(c_1 cosx + c_2 \sin x) + (\frac{1}{2}x^2 - x + 1)e^{3x}.$$

Пример. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' - 3y' - 10y = 13\sin x, \qquad y(0) = 0.7, \qquad y'(0) = 0.9.$$

Решение. Аналогично предыдущему примеру, сначала находим общее решение уравнения. Рассмотрим уравнение

$$y'' - 3y' - 10y = 0.$$

Запишем и решим его характеристическое уравнение

$$k^2 - 3k - 10 = 0 \quad => \quad k_1 = -2, k_2 = 5.$$

Т.к. корни действительные и различные, то общее решение однородного уравнения запишется в виде (33):

$$\bar{y}(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{5x}.$$

Далее, находим общее решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения имеет вид:

$$f(x) = 13\sin x \quad .$$

Сравнивая с (39), получим $\alpha = 0, \beta = 1$ и $\alpha + i\beta = i \neq k_{1,2} => r = 0$.

Поэтому общее решение будем искать в виде (40)

$$y^*(x) = A \cdot \cos x + B \cdot \sin x.$$

Для определения коэффициентов A и B найдем

$$y^{*\prime}(x) = -A \cdot \sin x + B \cdot \cos x,$$

$$y^{*\prime\prime}(x) = -A \cdot \cos x - B \cdot \sin x$$

и подставим выражения $y^*(x)$, $y^{*\prime}(x)$, $y^{*\prime\prime}(x)$ в исходное уравнение.

Получим равенство

$$-A \cdot \cos x - B \cdot \sin x - 3(-A \cdot \sin x + B \cdot \cos x) - 10(A \cdot \cos x + B \cdot \sin x) = 13\sin x.$$

Приравнивая коэффициенты при sin x и cos x в правой и левой частях уравнения, получим систему уравнений

$$\begin{cases} -11A - 3B = 0 \\ 3A - 11B = 13 \end{cases}.$$

Из системы находим A = 0.3 , B = -1.1.

Тогда частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид

$$y^*(x) = 0{,}3 \cdot \cos x - 1{,}1 \cdot \sin x,$$

а общее решение –

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{5x} + 0{,}3\cos x - 1{,}1\sin x.$$

Для определения частного решения исходного уравнения, которое удовлетворяет начальным условиям $y(0) = 0{,}7$, $y'(0) = 0{,}9$, найдем производную $y'(x)$:

$$y'(x) = -2c_1 e^{-2x} + 5c_2 e^{5x} - 0{,}3\sin x - 1{,}1\cos x$$

и , подставим начальные условия в общее решение и его производную, получим

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 0.3 = 0{,}7 \\ -2c_1 + 5c_2 - 1.1 = 0{,}9 \end{cases}.$$

Из системы находим

$$c_1 = \frac{3}{7}, \quad c_2 = \frac{4}{7}.$$

Окончательно, частное решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям будет иметь вид

$$y(x) = \frac{3}{7}e^{-2x} + \frac{4}{7}e^{5x} + \frac{3}{10}\cos x - \frac{11}{10}\sin x.$$

РЯДЫ

1.1 Числовые ряды. Основные понятия и теоремы

Пусть дана произвольная числовая последовательность

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \quad .$$

Формально образуем из ее элементов бесконечную сумму вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (41)$$

Определение. Выражение вида (41) называется *числовым рядом*. При этом отдельные слагаемые a_i ($i = 1, 2, \ldots$) называются *членами ряда* (41).

Определение. Сумму первых n членов ряда (41) называют *n-ой частичной суммой* ряда и обозначают символом S_n .

Итак, по определению

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad . \qquad (42)$$

Определение. Ряд (41) называется *сходящимся*, если сходится последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм этого ряда, а предел S указанной последовательности $\{S_n\}$ *суммой ряда* (41),

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n .$$

Таким образом, для сходящегося ряда (41), имеющего сумму *S*, мы можем записать равенство

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

В случае, если для данного ряда (41) предел последовательности частичных сумм не существует, то этот ряд называется *расходящимся*.

Пример 1. Ряд составленный из членов геометрической прогрессии

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \qquad (43)$$

сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$. В случае сходимости имеет сумму, равную $S = \dfrac{1}{1-q}$.

Пример 2. Числовой ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \qquad (44)$$

называется *обобщенным гармоническим*.

Этот ряд сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

При $\alpha = 1$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad (45)$$

называется *гармоническим*.

Отметим два простых свойства произвольного ряда, непосредственно вытекающие из определения его сходимости:

Теорема 1. Отбрасывание конечного числа членов ряда (или добавление к ряду конечного числа членов) не влияет на сходимость или расходимость этого ряда.

Теорема 2. Если $C = const$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} Ca_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Теорема 3. (необходимое условие сходимости ряда). Если ряд (41) сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 . \qquad (46)$$

1.2 Знакопостоянные ряды. Достаточные признаки сходимости рядов

Определение. Ряды, все члены которых положительны или отрицательны, называются *знакопостоянными рядами*.

Будем рассматривать ряды с положительными членами. Последовательность частичных сумм такого ряда является неубывающей.

Теорема 4. Для того, чтобы ряд с положительными членами сходился необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм этого ряда была ограничена.

Аналогичная теорема справедлива для рядов с отрицательными членами.

Теорема 5**.** (признак сравнения). Пусть даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (47) \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (48)$$

с положительными членами и пусть начиная с некоторого номера n справедливо неравенство $a_{\mathbf{n}} \le b_{\mathbf{n}}$. Тогда из сходимости ряда (48) следует сходимость ряда (47) , а из расходимости ряда (47) следует расходимость ряда (48).

Теорема 6. (признак Даламбера). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами. Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \qquad (49)$$

то данный ряд сходится при $L < 1$ и расходится при $L > 1$.

Теорема 7**.** (признак Коши). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами. Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \qquad (50)$$

то данный ряд сходится при $L < 1$ и расходится при $L > 1$.

Теорема 8**.** (интегральный признак Коши). Пусть функция $f(\boldsymbol{x})$ неотрицательна и не возрастает на $[1, +\infty)$ и в точках $\mathbf{x} = \mathbf{n}$ принимает значения $a_{\mathbf{n}} = f(n)$**.** Тогда числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится в том и только в том случае, когда сходится несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)dx\,.$$

В качестве примера использования интегрального признака рассмотрим *обобщенный гармонический* ряд (44)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}\,.$$

Возьмем функцию $f(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}$, она убывает и положительна на полупрямой $x \geq 1$ и удовлетворяет условию $f(n)=\dfrac{1}{n^{\alpha}}$.

Так как несобственный интеграл

$$\int_{1}^{\infty} f(x)dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$, то данный ряд по теореме 5 сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

1.3 Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Определение. Ряд называется *знакочередующимся*, если члены этого ряда поочередно имеют то положительный, то отрицательный знаки.

Знакочередующийся ряд удобно записать в виде

$$c_1 - c_2 + \ldots + (-1)^{n-1} c_n + \ldots \tag{51}$$

где все $c_i > 0$.

Теорема 9. (признак Лейбница). Если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда (51) монотонно убывают

$$c_1 > c_2 > \ldots > c_n > \ldots,$$

и общий член ряда стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, то ряд (51) сходится.

1.4 Ряды с членами произвольного знака. Абсолютно и условно сходящиеся ряды.

Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n , \tag{52}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, могут быть как положительными, так и и отрицательными, причем расположение положительных и отрицательных членов в ряде совершенно произвольно. Наряду с рядом (52) рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов этого ряда :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots \quad . \tag{53}$$

Определение. Ряд (52) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд (53).

Определение. Ряд (52) называется *условно сходящимся*, если этот ряд сходится, в то время как соответствующий ряд из модулей (53) расходится.

Теорема 10. Абсолютно сходящийся ряд сходится, т.е. из сходимости ряда (53) следует сходимость ряда (52) .

1.5 Степенные ряды

Определение. *Степенным рядом* называется ряд вида

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx_n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (54)$$

или вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad (55)$$

где a_0, $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ – постоянные действительные числа, называемые коэффициентами ряда (54) или (55).

Ряд вида (55) при помощи замены $x - x_0 = x'$ приводится к ряду вида (54). Поэтому будем рассматривать ряды вида (54).

Члены степенного ряда содержат переменную x. При конкретных значениях x степенной ряд становится числовым. Может оказаться, что степенной ряд для некоторых значений x сходится, для некоторых, наоборот, расходится. При исследовании степеных рядов основной задачей является нахождение всех значений x, при которых степенной ряд сходится. Множество таких значений x называется *областью сходимости* степенного ряда.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 11. Существует такое число $R > 0$, что степенной ряд сходится и притом абсолютно при $|x| < R$ (т.е. на интервале $(-R; R)$) и расходится при $|x| > R$ (вне интервала $(-R; R)$) .

Число R, удовлетворяющее условиям теоремы, называется радиусом сходимости степенного ряда, а интервал $(-R; R)$ интервалом сходимости степенного ряда.

Если степенной ряд сходится при всех значениях x, то полагают $R = \infty$, а если сходится только при $x = 0$, то полагают $R = 0$.

Таким образом, всякий степенной ряд имеет свой радиус сходимости R. При $x = \pm R$ ряд либо сходится, либо расходится. Этот вопрос решается индивидуально для каждого конкретного ряда.

Определяется радиус сходимости степенного ряда по следующим формулам.

Теорема 12. Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L, \qquad (56)$$

то радиус сходимости ряда (54) равен $R = \dfrac{1}{L}$.

Теорема 13. Если существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L, \tag{57}$$

то радиус сходимости степенного ряда (54) равен $R = \dfrac{1}{L}$.

В обоих случаях полагают $R = 0$ при $L = \infty$ и $R = \infty$ при $L = 0$.

1.6 Разложение элементарных функций в степенные ряды

Говорят, что функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

на интервале $(-R;\ R)$, если на этом интервале данный ряд сходится и его сумма равна $f(x)$, т.е.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad x \in (-R;\ R). \tag{58}$$

Теорема 14. Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд (44) на интервале $(-R;\ R)$, то это разложение единственно.

Степенной ряд (44), коэффициенты которого определяются по формулам

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad (n = 0, 1, \dots),$$

называется *рядом Тейлора-Маклорена* функции $f(x)$ по x.

Таким образом, ряд Тейлора функции $f(x)$ на интервале $(-R;\ R)$, имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \tag{59}$$

При решении практических задач пользуются следующими разложениями основных элементарных функций в ряд:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \qquad x \in (-\infty;\ +\infty), \tag{60}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \qquad x \in (-\infty;\ +\infty), \tag{61}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \qquad x \in (-\infty;\ +\infty), \tag{62}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots, \qquad x \in (-1;\ 1], \tag{63}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)^3}{3!} + \dots, \ x \in (-1;\ 1), \tag{64}$$

где α – любое не целое число.

1.7 Примеры решения задач.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n+1}.$$

Решение. Выпишем общий член ряда

$$a_n=\frac{3^n}{3^n+1}$$

и проверим выполнение необходимого признака сходимости (46)

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+1/3^n}=1.$$

Т. к. предел равен 1, то не выполняется необходимое условие сходимости ряда и, следовательно, данный ряд расходится.

Замечание. Необходимое условие сходимости ряда (46) удобно применять в тех случаях, когда оно легко проверяется. В противном случае можно пользоваться достаточным признаками сходимости.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2^n}.$$

Решение. Общий член ряда имеет вид

$$a_n=\frac{n+2}{2^n}.$$

В данном случае удобнее использовать признак Даламбера (49). Для этого запишем a_{n+1}:

$$a_{n+1}=\frac{n+3}{2^{n+1}}$$

и вычислим предел (49)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{2^n}:\frac{n+3}{2^{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+2}\cdot\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}.$$

Т. к. значение предела меньше 1, то по признаку Даламбера числовой ряд сходится.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n-1}{5n+3}\right)^n.$$

Решение. Общий член ряда имеет вид

$$a_n=\left(\frac{6n-1}{5n+3}\right)^n.$$

Т.к. общий член ряда есть некоторое выражение в степени n, то в данном

случае удобнее использовать признак Коши (50).
Вычислим предел (50)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{6n-1}{5n+3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n-1}{5n+3}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{6-1/n}{5+3/n} = \frac{6}{5}.$$

Т. к. значение предела больше 1, то по признаку Коши числовой ряд расходится.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда

$$1-\frac{2}{1!}+\frac{3}{2!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n!}+\ldots$$

и установить характер сходимости.

Решение. Данный ряд является знакочередующимся. Для исследования его сходимости воспользуемся признаком Лейбница (п.1.3). Сравним члены ряда по абсолютной величине. Начиная со второго члена ряда выполняется

$$2>\frac{3}{2}>\frac{4}{6}>\ldots>\frac{n+1}{n!}>\ldots,$$

т.е. члены ряда убывают по абсолютной величине. Найдем предел общего члена ряда

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{n+1}{n} = 0.$$

Таким образом, условия теоремы Лейбница выполняются и, следовательно, знакочередующийся ряд сходится (условно).

Исследуем этот ряд на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим ряд составленный из абсолютных величин членов исходного ряда и исследуем его сходимость.

Получим знакопостоянный числовой ряд

$$1+\frac{2}{1!}+\frac{3}{2!}+\ldots+\frac{n+1}{n!}+\ldots.$$

Для исследования его сходимости применим признак Даламбера:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{3^n}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot 3^{n+1}}{(n+1)!\cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1} = 0<1.$$

Знакопостоянный ряд сходится, из этого следует, что исходный знакочередующийся сходится также и абсолютно.

Пример 5. Найти радиус и интервал сходимости ряда

$$2x+\frac{2^2x^2}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{2^nx^n}{\sqrt{n}}+\ldots$$

Решение. Общий член ряда имеет вид

$$a_n = \frac{2^n}{\sqrt{n}}.$$

В данном случае удобнее использовать формулу (56). Для этого запишем a_{n+1}

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}}.$$

и по формуле (56) получим

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{2^n} = 2\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = 2 \quad => \quad R = \frac{1}{L} = \frac{1}{2}.$$

Интервал сходимости ряда

$$\left(-\frac{1}{2};\quad \frac{1}{2}\right).$$

Исследуем, далее, поведение степенного ряда на концах интервала сходимости.

Пусть x = 1/2. Получим числовой ряд

$$2\cdot\frac{1}{2} + \frac{2^2}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + ... + \frac{2^n}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{2}\right)^n + ... = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} + ...$$

Это обобщенный гармонический ряд (44) с $\alpha = 1/2 < 1$. Такой ряд расходится.

Следовательно, степенной ряд при $x = 1/2$ расходится.

Положим теперь, x = – 1/2 После подстановки этого значения в степенной ряд получим

$$-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - ... + (-1)^n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} + ... \quad .$$

Нетрудно проверить, что полученный числовой знакочередующийся ряд сходится по признаку Лейбница. Тогда исходный степенной ряд сходится при

x = – 1/2.

Поэтому интервалом сходимости данного степенного ряда будет

$$\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right).$$

Пример 6. Найти радиус и интервал сходимости

$$\frac{5}{4}x + \frac{5^2x^2}{4^2} + ... + \frac{5^nx^n}{4^n} + ... \quad .$$

Решение. Общий член данного ряда имеет вид

$$a_n = 5^n / 4^n.$$

Для определения радиуса сходимости ряда воспользуемся формулой (57). Получим

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5}{4}\right)^n} = \frac{5}{4} \qquad => \quad R = \frac{1}{L} = \frac{4}{5}.$$

Интервалом сходимости ряда будет

$$\left(-\frac{4}{5};\quad \frac{4}{5}\right).$$

Далее, необходимо исследовать сходимость степенного ряда на концах интервала, т.е. при $x = \pm\frac{4}{5}$.

Пусть $x = 4/5$. Подставим значение x в степенной ряд, получим числовой ряд

$$\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5} + \frac{5^2}{4^2}\cdot\frac{4^2}{5^2} + ... + \frac{5^n}{4^n}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^n + ...$$

или

$$1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots .$$

Полученный числовой ряд, очевидно, расходится, так как его общий член не стремится к нулю. Таким образом, при $x = 4/5$ степенной ряд расходится.

Пусть теперь $x = - 4/5$. После подстановки этого значения в степенной ряд получим числовой ряд

$$-1 + 1 - 1 + ... + (-1)^n + ...$$

Полученный числовой ряд также расходится, т.к. его общий член не стремится к нулю. Следовательно, при $x = - 4/5$ степенной ряд расходится.

Окончательно, степенной ряд сходится на интервале

$$\left(-\frac{4}{5};\quad \frac{4}{5}\right).$$

Пример 7. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{0,25} \frac{e^{-x^2} - 1}{x} dx$$

с точностью 0.0001, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд.

Решение. Воспользуемся разложением в степенной ряд функции e^x (60):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... \ , \ x \in (-\infty; +\infty) .$$

Тогда подынтегральная функция может быть представлена в виде следующего ряда:

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots,$$

$$e^{-x^2}-1=-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots,$$

$$\frac{e^{-x^2}-1}{x}=-x+\frac{x^3}{2!}-\frac{x^5}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{n!}+\ldots .$$

Подставим полученное разложение подынтегральной функции и вычислим интеграл

$$\int_0^{0.25}\frac{e^{-x^2}-1}{x}dx=\int_0^{0.25}(-x+\frac{x^3}{2!}-\frac{x^5}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{n!}+\ldots)dx=$$

$$=\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4\cdot 2!}-\frac{x^6}{6\cdot 3!}+\ldots\right)\Bigg|_0^{0.25}=-\frac{(0.25)^2}{2}+\frac{(0.25)^4}{4\cdot 2!}-\frac{(0.25)^6}{6\cdot 3!}+\ldots$$

По условию интеграл необходимо вычислить с точностью 0.0001, поэтому в полученном числовом ряде ограничимся членами, которые превышают указанную точность:

$$\frac{(0{,}25)^2}{2}=0{,}03125,$$

$$\frac{(0{,}25)^4}{4\cdot 2!}=0{,}000488,$$

$$\frac{(0{,}25)^6}{6\cdot 3!}\approx 0{,}00001<0.0001.$$

Таким образом,

$$\int_0^{0.25}\frac{e^{-x^2}-1}{x}dx=-0{,}03125+0{,}00049=-0{,}0308$$

с точностью 0.0001.

Пример 8. Найти четыре первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд решения $y=y(x)$ дифференциального уравнения

$$y'=\cos 2x-4x^2y,$$

удовлетворяющего начальному условию $y(0)=1$.

Решение. Будем искать решение этого уравнения в виде степенного ряда

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots .$$

Из начального условия найдем коэффициент a_0, получим

$$1=a_0+a_1\cdot 0+a_2\cdot 0+a_3\cdot 0+a_4\cdot 0+\ldots \quad => \quad a_0=1.$$

Для определения остальных коэффициентов найдем производную от y, а также разложим в ряд функцию $\cos 2x$ (по формуле 62), затем разложения в ряд y, y' и $\cos 2x$ подставим в уравнение.

Получим

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \ldots ,$$

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} - \ldots ,$$

$$y' = \cos 2x - 4x^2 y \quad =>$$

$$=> \quad a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \ldots = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} - \ldots - 4x^2 \cdot (a_0 + a_1x +$$

$$+ a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots) \quad =>$$

$$=> \quad a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \ldots = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \ldots - 4a_0x^2 - 4a_1x^3 -$$

$$- 4a_2x^4 - 4a_3x^5 - \ldots .$$

Приравняем коэффициенты в правой и левой частях полученного равенства, будем иметь систему уравнений относительно неизвестных a_1, a_2, a_3, …

$$\begin{array}{l||l} x^0 & a_1 = 1 \\ x^1 & 2a_2 = 0 \\ x^2 & 3a_3 = -2 - 4a_0 \\ x^3 & 4a_4 = -4a_1 \end{array} .$$

Из этой системы получим,

$$a_1 = 1 , \; a_2 = 0, \; a_3 = -2 , \; a_4 = -1.$$

Тогда решение с точностью до четырех ненулевых членов разложения в ряд будет иметь вид

$$y = 1 + x - 2x^3 - x^4 .$$

ЛИТЕРАТУРА

1 Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Дрофа, 2004.
2 Пискунов И.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М.: Интеграл - Пресс, 2006, Т.2.
3 Данко П.Е., Попов А. Г. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах.- М.: Высш. шк., 2000, Ч 2.