МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ (ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

С.К. Жданов В.А. Курнаев М.К. Романовский И.В. Цветков

ОСНОВЫ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПЛАЗМЕ И ПЛАЗМЕННЫХ УСТАНОВКАХ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Москва 2000

УДК 533.9 (075)
ББК 22.333
Ж42

Жданов С.К., Курнаев В.А., Романовский М.К, Цветков И.В.
ОСНОВЫ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПЛАЗМЕ И ПЛАЗМЕННЫХ УСТАНОВКАХ. М: МИФИ, 2000

Учебное пособие содержит изложение основ физики плазмы и процессов, происходящих в приборах и установках, предназначенных для создания и практического применения плазмы, а также сведения об эмиссионных явлениях, используемых при генерации плазмы, сведения об элементах ионной и электронной оптики, о физике основных видов газовых разрядов. В основу пособия положены курсы «Физика плазмы», «Введение в физику плазмы» и «Низкотемпературная плазма», читаемые в МИФИ студентам факультета экспериментальной и теоретической физики, специального факультета физики и факультета автоматизации приборов и установок.

Базовый характер пособия и сочетание в одном пособии сведений о физике плазмы, о физической электронике и о физике газового разряда делает его универсальным и полезным для студентов, будущих инженеров-физиков, и аспирантов, специализирующихся как в физике горячей плазмы, технологии термоядерного синтеза, так и в других областях, связанных с применением плазмы и потоков заряженных частиц в генераторах и в ускорителях частиц в плазменно-технологических установках, в плазменных и ионных движителях и во многих других областях.

Рецензент профессор, д.ф-м.н. Е.Е. Ловецкий

Рекомендовано редсоветом МИФИ в качестве учебного пособия

© С.К. Жданов, В.А. Курнаев, М.К. Романовский, И.В. Цветков, 2000.

©Московский государственный инженерно-физический институт, 2000.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

ВВЕДЕНИЕ

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СВОЙСТВА ПЛАЗМЫ

§1. Образование плазмы

§2. Квазинейтральность, плазменная частота

§ 3. Дебаевский радиус, дебаевский слой

§ 4. Идеальность плазмы

§ 5. Прямые и обратные процессы в плазме

§ 6. Упругое рассеяние

§ 7. Равновесия в плазме

§ 8. Неравновесность плазменных систем

§ 9. Процессы релаксации в плазме

§ 10. Процессы переноса в плазме

§ 11. Диэлектрическая проницаемость плазмы

ГЛАВА 2. ПЛАЗМА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

§ 12. Одночастичное рассмотрение

§ 13. Движение в постоянном и однородном магнитном поле

§ 14. Движение в сильном медленно меняющемся поле. Дрейфовое приближение

§ 15. Движение частицы в однородном магнитном поле

под действием постоянной силы

§ 16. Дрейф заряженных частиц вдоль плоскости скачка

магнитного поля

§17. Важнейшие типы дрейфовых движений частиц в плазме

§ 18. Адиабатические инварианты

§ 19. Применение адиабатического и дрейфового приближений

§ 20. Явления переноса в замагниченной плазме

ГЛАВА 3. МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОД

ОПИСАНИЯ ПЛАЗМЫ

§ 21. Идеальная одножидкостная гидродинамика плазмы. Условия применимости

§ 22. Основные уравнения

§ 23. Магнитное давление

§ 24. Равновесие плазмы в магнитной гидродинамике

§ 25. Быстрые процессы
§ 26. Взаимное проникновение плазмы и магнитного поля
ГЛАВА 4. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ. НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ
§ 27. Дисперсионные уравнения для продольных и поперечных волн
малой амплитуды
§ 28. Метод малых колебаний. Диэлектрическая проницаемость незамагниченной плазмы
§ 29. Поперечные электромагнитные волны
в незамагниченной плазме
§ 30. Явление отсечки низкочастотной поперечной волны
§ 31. Ленгмюровские колебания и волны в плазме. Плазмоны
§ 32. Ионные ленгмюровские волны.
Ионно-звуковые волны в плазме.
§ 33. Бесстолкновительное затухание волн в плазме
§ 34. Диэлектрические свойства магнитоактивной плазмы
§ 35. Волны в магнитоактивной плазме
§ 36. Неустойчивости плазмы
§ 37. Кинетические неустойчивости плазмы
ГЛАВА 5. ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА
§ 38. Аналогия световой и электронной оптики
§ 39. Электростатические линзы
§ 40. Магнитные линзы
§ 41. Отклоняющие и фокусирующие элетронно-оптические системы
ГЛАВА 6. ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА ЭЛЕКТРОННЫХ И ИОННЫХ ПУЧКОВ
§ 42. Ограничение тока пространственным зарядом в диоде
§ 43. Предельная плотность тока пучка частиц в пролетном промежутке в вакууме
ГЛАВА 7. ЭМИССИОННАЯ ЭЛЕКТРОНИКА
§ 44. Термоэмиссионная электроника
§ 45. Автоэлектронная эмиссия
§ 46. Изменение температуры эмиттера при термо и автоэлектронной
эмиссии
§ 47. Фотоэлектронная эмиссия
§ 48. Вторичная электронная эмиссия
ГЛАВА 8. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ГАЗАХ И ГАЗОВЫЙ РАЗРЯД
§ 49. Электрический ток в газах
§ 50. Теория электронных лавин

§ 51. Тлеющий разряд
§ 52. Дуговые разряды
§ 53. Искровой и коронный, ВЧ и СВЧ разряды
Список использованной и рекомендуемой литературы

ПРЕДИСЛОВИЕ

В данном учебном пособии излагаются основы физики плазмы и процессов, происходящих в установках и приборах, предназначенных для создания и практического применения плазмы. Поэтому, наряду с «классическим» изложением основных понятий, характеризующих плазму и плазмоподобные среды, а также специфических свойств плазмы и протекающих в ней явлений, в пособии приведены сведения об эмиссионных явлениях, используемых при генерации плазмы, элементах ионной и электронной оптики и о физике некоторых основных видов газовых разрядов.

Такое сочетание в одном пособии сведений о физике плазмы, о физической электронике и о физике газового разряда делает это пособие более универсальным для студентов, будущих инженеров-физиков, и аспирантов, которым придется иметь дело с созданием и применением плазменных установок и устройств с использованием и плазмы, и пучков заряженных частиц в различных исследовательских и технологических задачах.

В основу пособия положены курсы «Физика плазмы», «Введение в физику плазмы» и «Низкотемпературная плазма», читаемых в МИФИ студентам факультета экспериментальной и теоретической физики, специального факультета физики и факультета автоматизации приборов и установок. Базовый характер этого пособия, в котором излагаются основы физических явлений как в самой плазме при ее образовании в плазменных установках, так и при генерации с ее помощью ионных и электронных пучков, делает его полезным для студентов, специализирующихся и в физике горячей плазмы, технологии термоядерного синтеза, и в других областях, связанных с применением плазмы и потоков заряженных частиц в генераторах и в ускорителях частиц в плазменно-технологических установках, в плазменных и ионных движителях и во многих других областях.

Несколько слов о структуре книги. Намеченная выше цель определила отбор материала и принятую нами последовательность его изложения. Глава 1 посвящена краткому обсуждению основных понятий, употребительных в описании плазменных явлений и, по сути дела, составляющих основу физики плазмы как состояния вещества. В главе 2 обсуждаются наиболее характерные особенности поведения плазмы, помещенной в магнитное поле. В главе 3 излагаются основы магнитной гидродинамики плазмы и даны простейшие ее приложения для описания равновесия плазмы и динамических процессов в ней. В главе 4 обсуждаются волновые свойства плазмы и условия распространения волн в плазме без магнитного поля и в магнитоактивной плазме, а также основные типы макроскопических и кинетических неустойчивостей, которые могут развиваться в плазме. Эти главы являются, по сути дела, результатом обобщения, необходимого дополнения и критического переосмысления материала, опубликованного авторами ранее в пособиях [1,2]. Обсуждению физики пучков заряженных частиц, вопросам их фокусировки и условий распространения посвящены главы 5 и 6. Проблемы эмиссионной электроники обсуждаются в главе 7 и, наконец, заключительная глава 8 дает краткий экскурс в физику основных типов газовых разрядов.

Отметим также, что нами принята нумерация рисунков и формул по главам.

ВВЕДЕНИЕ

Всем известны три агрегатных состояния вещества - твердое, жидкое, газообразное. Плазму часто называют четвертым состоянием вещества - самым высокотемпературным, имея в виду цепочку превращений: твердое тело - жидкость - газ - плазма, имеющую место при повышении температуры (Sir William Croocus , 1879).

График зависимости количества энергии, содержащейся в некоторой массе вещества (например, в одном грамме), от его температуры подобен графику, показанному на рис. В.1. При достаточно низкой температуре любое вещество находится в твердом состоянии; по мере повышения температуры его энергосодержание растет - это участок a-b. Наклон отрезка прямой a-b определяется теплоемкостью вещества, а соответствующий участок на шкале температур до точки b может быть и очень малым (для водорода 13,9К) и весьма большим (для вольфрама 3643 К). В точке b начинается плавление, для чистых веществ температура остается постоянной:

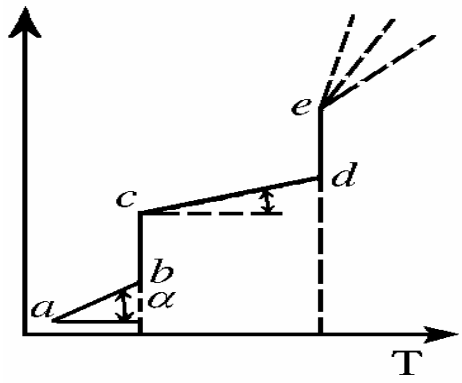


Рис. В.1. Зависимость энергосодержания от температуры

энергия затрачивается на разрушение связей, определяющих упорядоченное расположение частиц вещества относительно друг друга. Величина участка b-c определяется так называемой "скрытой" теплотой плавления. При дальнейшем повышении температуры на участке c-d вещество остается в жидком состоянии, растет энергия движения его молекул. Наклон отрезка прямой c-d определяется теплоемкостью вещества в жидком состоянии. В точке d начинается кипение, и вещество переходит в газообразное состояние. На отрезке d-c температура остается постоянной, энергия расходуется на разрушение связей между молекулами. Величина участка d-a определяется так называемой теплотой испарения. Необходимо отметить, что эти рассуждения верны при некотором заданном давлении. На самом деле и над твердым телом всегда имеется некоторое давление насыщенного пара, весьма малое для большинства веществ. Однако над некоторыми веществами оно все же велико (например, у йода при температуре 387 К оно составляет 90 мм рт. ст.).

Поэтому приведенные выше рассуждения имеют характер иллюстрации изменения привычных для нас агрегатных состояний вещества в зависимости от температуры. По мере роста температуры увеличивается энергия молекул, уменьшаются связи и после испарения все молекулы становятся свободными. Если продолжать увеличивать энергию этих свободных молекул (например, нагревать газ), то при взаимных столкновениях молекулы начнут распадаться на атомы. Но это уже принципиально новый процесс – часть энергии затрачивается на процесс, качественно меняющий состав газа.

Хорошо известно, что газ представляет собой совокупность свободных частиц – молекул (обычно) или атомов (реже). Эти частицы сталкиваются друг с другом, со стенками сосуда, и в результате столкновений устанавливается вполне определенное распределение частиц по скоростям. При каждой данной температуре основная часть частиц имеет некоторую определенную (наиболее

вероятную) скорость, но всегда есть и более медленные частицы и более быстрые. Чем дальше от наиболее вероятной скорости (и в сторону уменьшения и в сторону увеличения), тем меньше частиц, имеющих такую, далекую от наиболее вероятной, скорость. На рис. В.2 представлено в качестве иллюстрации относительное число частиц *dn/ndv*, приходящееся на интервал скорости *dv*, в зависимости от величины модуля скорости *v*. Это – известное распределение Максвелла. Наиболее важно то, что при любых температурах всегда имеются быстрые частицы, причем, чем выше температура, тем их больше.

В обычных условиях, например при комнатной температуре, доля таких частиц крайне мала, так что энергия подавляющего числа частиц недостаточна для того, чтобы разрушить молекулу (или тем более атом), поэтому практически преобладают только так называемые упругие столкновения, в результате которых полная кинетическая энергия обеих сталкивающихся частиц остается неизменной. Это типично для обычного газа, такие столкновения и приводят к установлению максвелловского распределения (по скоростям или энергиям, так как при данной массе частицы ее кинетическая энергия однозначно определяется скоростью: $E=mv^2/2$; предполагается, что газ в целом покоится).



Рис.В.2. Функция распределения.

Имеющиеся всегда быстрые частицы разбивают молекулы и даже атомы, но их ничтожно мало, если температура газа не велика. Процесс распада молекул на атомы называют *диссоциацией*, процесс отрыва электрона от атома – *ионизацией*, а атом, потерявший один электрон (или больше),- ионом. При нормальных условиях в 1 $см^3$ воздуха содержится 10^3 - 10^5 ионов, что ничтожно мало по сравнению с числом молекул $2.7\cdot10^{19}$ в каждом кубическом сантиметре. Однако при повышении температуры все больше становится быстрых частиц, все чаще происходят процессы диссоциации и ионизации. В этих процессах часть кинетической энергии частиц затрачивается на внутримолекулярные (или внутриатомные) процессы; поэтому кинетическая энергия сталкивающихся частиц до соударения уже не равна их кинетической энергии после соударения. Такие процессы называют *неупругими*. В обычном газе роль неупругих процессов пренебрежимо мала, но при достаточно высокой температуре они приобретают существенное значение. В результате образуются новые частицы: при диссоциации – атомы, при ионизации – ионы и электроны. Последнее особенно важно. Атомы, как и молекулы, электрически нейтральны, а вот ионы и электроны имеют электрические заряды. Наличие электрических зарядов существенно меняет характер взаимодействия между частицами. Ведь нейтральные частицы взаимодействуют, грубо говоря, только при непосредственном столкновении, подобно упругим бильярдным шарам, так как потенциал поля сил взаимодействия нейтральных частиц (силы Ван-дер-Ваальса) быстро убывает с увеличением расстояния между частицами. Тогда как заряженные частицы создают вокруг себя протяженные электрические поля, значительно медленнее убывающие с расстоянием, а потому и сила взаимодействия между заряженными частицами (сила Кулона) значительно медленнее убывает с ростом расстояния между частицами. Именно дальнодействующий характер сил между заряженными частицами и приводит к

качественно новым - плазменным - эффектам в газе, содержащем свободные заряды. Это качественно новый газ: газ, содержащий в заметном числе заряженные частицы. Такой газ и называют плазмой. Сам термин “*плазма*” появился в обиходе науки после работ Ленгмюра и Тонкса в 1928 г., и был введен для описания совокупности явлений, сопровождающих электрический разряд в газе. Легко понять, что между газом нейтральных частиц и газом-плазмой нет четкой границы: обычный газ становится плазмой, как только роль взаимодействия заряженных частиц становится, если не определяющей, то существенной для поведения данной субстанции. Очевидно, что эта граница довольно размытая, в отличие от резких фазовых переходов, имеющих место с повышением температуры и сопровождающих превращение твердого тела в жидкость, а затем жидкости в газ. Некоторое равновесное количество заряженных частиц (определяемое формулой Саха) присутствует в газе при любой температуре, например, свободные заряды в пламени обычной свечи. Но вряд ли столь слабоионизованный газ можно назвать плазмой. Вместе с тем, в дальнейшем мы увидим, что типично плазменные процессы наблюдаются в газе-плазме даже тогда, когда ионизованы только доли процента всех частиц. Можно рассуждать и от обратного: “истинная” плазма состоит из свободных ионов и электронов и остается плазмой до тех пор, пока примесь нейтральных частиц не изменит существенно ее свойств. Но возникает вопрос можно ли, например, назвать плазмой нескомпенсированные по заряду пучки ускоренных частиц, широко используемые в физических экспериментах? Можно ли назвать плазмой весьма разреженный межзвездный или межгалактический газ, ионизуемый излучением звезд? Очевидна необходимость количественного критерия, позволяющего определить, является ли данная совокупность заряженных и нейтральных частиц плазмой. Такой критерий можно сформулировать, опираясь на понятия ленгмюровской частоты и дебаевского радиуса (или длины) экранирования. Именно эти фундаментальные в физике плазмы параметры задают минимальные характерные временной и пространственный масштабы поддержания (или спонтанного нарушения) квазинейтральности плазмы. Опираясь на эти понятия, можно установить, почему плазменные свойства проявляют, на первый взгляд различные среды - электронный газ в металлах, электронно-дырочная “жидкость” полупроводников или, например, разреженный газ космоса.

Эти, а также другие среды, например электролиты, к которым относятся и «рабочие жидкости» живых систем, иногда называют плазмоподобными [3,4]. Это подчеркивает важность характерных для плазмы законов при описании свойств столь большого и важного в практическом применении числа объектов природы. Электронная плазма металлов называется *вырожденной*. Критерием вырождения, как известно, является соотношение между энергией Ферми, возрастающей с ростом концентрации частиц, и тепловой энергией. Если тепловая энергия меньше энергии Ферми, то плазма вырождена и существенны квантовые эффекты. Мы будем иметь дело с *невырожденной* плазмой, т.е. с такой плазмой, в которой концентрация заряженных частиц достаточно мала (или температура достаточно велика). Строго говоря, многие физики вводят дополнительные условия - считают, например, обязательной компонентой плазмы электромагнитное излучение. Последнее бесспорно верно для больших объектов из плотной плазмы, например, звезд. В них излучение "заперто" - излучение может выходить лишь из сравнительно тонких наружных слоев. В

большинстве лабораторных устройств плазма оптически тонкая, излучение не заперто - оно свободно проходит через всю плазму.

Подведем итоги. По современным представлениям плазма - частично или полностью ионизованный газ, в котором объемные плотности положительных и отрицательных зарядов практически одинаковы. Такое свойство плазмы называют *квазинейтральностью*. Заряженные частицы плазмы взаимодействуют с силой, для которой характерно *дальнодействие*. Это обстоятельство определяет исключительную роль в плазме, помимо парных столкновений отдельных частиц, *коллективных эффектов*, т.е. полей от многих частиц, проявляющихся в нарастании плазменных колебаний, волн и шумов, в свою очередь воздействующих на движение частиц плазмы. Если возбуждается достаточно много коллективных степеней свободы, то колебания плазмы становятся нерегулярными, она переходит в так называемое *турбулентное состояние*. В этих условиях становятся существенными нелинейные эффекты взаимодействия коллективных возбуждений (мод) плазмы. Нелинейные явления могут быть существенны и в регулярных процессах, например, при воздействии на плазму волн конечной амплитуды. Понятно поэтому, что современная физика плазмы - это физика нелинейных явлений. Еще одна особенность этого нового состояния вещества - плазмы - заключается в сильном воздействии на него внешних электрических и магнитных полей, вызывающих появление объемных зарядов и токов. Вместе с тем, существенное разделение зарядов в плазме затруднено в силу ее квазинейтральности: из-за достаточно большой плотности заряженной компоненты в плазме объемный заряд вызывал бы появление слишком больших собственных полей плазмы, чего в действительности не происходит. В определенном смысле квазинейтральность плазмы есть проявление того свойства, что главную роль в плазме играет взаимодействие частиц через *самосогласованные поля.* В этом отношении динамические процессы в плазме являются весьма сложными явлениями. Они требуют изучения не только динамики частиц в заданных внешних полях, но и одновременного учета влияния собственных, согласованных с движением частиц электромагнитных полей, самым существенным образом сказывающихся на движении самих частиц плазмы.

В заключение нелишне подчеркнуть, что плазма во Вселенной и в разнообразных природных процессах и явлениях представлена весьма широко. Межгалактическая, межзвездная и межпланетная плазма, плазма звезд и звездных атмосфер, от Белых Карликов до Красных Гигантов, нейтронных звезд, пульсаров и черных дыр, плазма верхних слоев атмосферы планет и плазма радиационных поясов, плазма грозовых разрядов и газоразрядная плазма лабораторных устройств, “термоядерная” плазма современных термоядерных установок - вот далеко не полный перечень приложений науки о плазме. Наконец, в самые первые мгновения жизни Вселенной после Большого Взрыва, когда родился наш мир, как полагают, вещество также находилось в состоянии горячей плазмы, отголоском которого является реликтовое излучение, состоящее сейчас из “холодных” (с температурой около 2.7К), а тогда “горячих” квантов, находившихся в равновесии с плазмой чудовищной температуры - в сотни миллионов и миллиардов градусов.

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СВОЙСТВА ПЛАЗМЫ

§1. Образование плазмы

Для того чтобы обычный газ перевести в плазменное состояние, необходимо ионизировать заметную часть молекул или атомов. Процесс ионизации является пороговым. Чтобы атом стал ионизированным, электрон в атоме должен приобрести энергию большую, чем его энергия связи. Передача энергии, достаточной для разрыва этой связи, возможна при соударении атома или молекулы с другой быстрой частицей - электроном, ионом, атомом или молекулой, при взаимодействии с фотоном, при воздействии достаточно сильного электрического поля. Своеобразный процесс ионизации - так называемая лоренц-ионизация, возможен при движении быстрого атома в сильном магнитном поле. Дело здесь в том, что в собственной системе отсчета, т.е. в системе координат, относительно которой атом неподвижен, на него, согласно преобразованиям Лоренца, действует электрическое поле $E=(v/c)B$. Если величина этого поля достаточна, атом может быть ионизирован.

Рассмотрим процессы, которые могут произойти при столкновении двух быстрых (энергичных) молекул AB и CD:

1) $AB + CD \rightarrow AB + CD$ - *упругое рассеяние*;
2) $AB + CD \rightarrow AB^* + CD$ - *неупругое рассеяние*. Молекула AB* оказалась в возбужденном состоянии (значок *). Может оказаться возбужденной CD* или AB* и CD* одновременно. Полная кинетическая энергия уменьшилась на энергию возбуждения. Возможны различные виды возбуждений;
3) $AB + CD \rightarrow A + B + CD$
   $AB + CD \rightarrow AB + C + D$
   $AB + CD \rightarrow A + B + C + D$
   -*диссоциация.* Одна из молекул или обе молекулы распались на атомы;
4) $AB + CD \rightarrow AB^+ + CD + e$
   $AB + CD \rightarrow AB + CD^+ + e$
   $AB + CD \rightarrow AB^+ + BC^+ + 2e$
   -*ионизация.* Одна из молекул (или обе) “потеряла” электрон и стала ионом.

В результате этих процессов, как мы видим, появились новые частицы: возбужденные молекулы, отдельные атомы, ионы и электроны. Очевидно, что любая из молекул может столкнуться с любой из этих новых частиц, и все они могут сталкиваться друг с другом. При этом возможны не только “прямые” процессы, перечисленные выше, но и обратные. Например, процессом обратным диссоциации является *ассоциация* - процесс объединения атомов в молекулу. Процессом, обратным ионизации, является *рекомбинация***.** Сама по себе рекомбинация может происходить по разному, например возможны: *тройная рекомбинация, излучательная рекомбинация и диссоциативная рекомбинация.* В отличие от ионизации рекомбинация возможна только при наличии “третьего тела”, уносящего избыток энергии, равный энергии связи рекомбинирующих частиц.

Таким третьим телом может быть еще один электрон, тогда это тройная рекомбинация, фотон - излучательная рекомбинация, или энергия связи атомов в молекулярном ионе - при рекомбинации молекула разрушается, поэтому этот процесс называется диссоциативной рекомбинацией.

Атомы и молекулы не могут долго оставаться в возбужденном состоянии, поскольку возбужденные состояния имеют вполне определенное конечное время жизни, спустя которое происходит переход в основное состояние, сопровождающийся излучением кванта. Следует отметить, что в атомах возможны возбужденные состояния только электронных уровней, а в молекулах - также еще возбуждения колебательных и вращательных уровней. Колебательные возбуждения отмечают индексом v, например AB_v, вращательные, как правило, индексом j или r (от английского rotation), например DC_j (или DC_r).

Возбужденные частицы могут столкнуться с другой молекулой, атомом, или ионом, передать им всю энергию возбуждения (или часть ее), или выделить энергию возбуждения в виде кванта (или нескольких квантов) электромагнитного излучения. Значит, появление возбужденных частиц обязательно сопровождается появлением квантов электромагнитного излучения - фотонов. Так как частиц уже много: молекулы, атомы, молекулярные и атомарные ионы (в основном и в возбужденных состояниях), электроны, фотоны, то число возможных взаимодействий становится очень большим и, следовательно, удобнее уже рассматривать виды взаимодействий, их возможность (или невозможность), а при возможности - вероятность того или иного процесса.

Такую совокупность свободных заряженных и нейтральных частиц и квантов электромагнитного излучения американский физик Ленгмюр в 1928 г. назвал плазмой. Таким образом, плазма - это газ, но газ специфический: в нем могут присутствовать заряженные частицы, очень сильно различающиеся по массе (в тысячи и десятки тысяч раз). Например, полностью ионизированная водородная плазма в качестве положительной компоненты содержит ионы водорода, т.е. “голые” протоны, а отрицательно заряженной компонентой, нейтрализующей положительный заряд протонов, являются электроны. Как известно, массы этих частиц

$$m_p = 1.67\cdot10^{-24}\ \text{г}, \quad m_e = 0.91\cdot10^{-27}\ \text{г},$$

и для отношения этих масс получаем приближенно $m_p/m_e \cong 1836$. Массы элементарных частиц часто измеряют в энергетических единицах. Для электрона и протона соответствующие величины равны $m_e c^2 \cong 511$кэВ, $m_p c^2 \cong 938$мэВ.

Столкновения частиц друг с другом принято характеризовать сечениями столкновений σ. Для упругих столкновений атомарных или молекулярных частиц при небольших энергиях столкновений сечения имеют порядок квадрата поперечного размера частиц, а для столкновений медленных электронов с атомом – они порядка квадрата размера атома. Например, как известно, размер атома водорода определяется радиусом Бора $a_B = 0.529\cdot10^{-8}$см, так что сечения упругих столкновений составляют $\sigma_{упр} \sim 10^{-16}$см^2. Сечения ионизации атомов электронным ударом в максимуме сечений имеют такой же порядок величины. При этом на пороге ионизации, то есть когда энергия налетающего на атом электрона равна энергии ионизации атома, сечение ионизации обращается в ноль, затем после прохождения максимума убывает с ростом энергии столкновения.

В качестве примера приведем формулу, рекомендованную в [5] для оценки величины сечения ионизации атомарного водорода или водородоподобного атома электронным ударом:

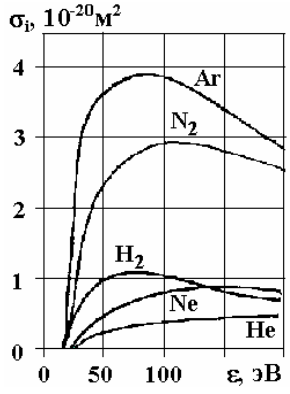


Рис. 1.1. Сечения ионизации электронным ударом из основного состояния

$$\sigma_i = \pi a_B^2 \left(\frac{R}{I}\right)^2 \frac{n_l}{2l+1} \Phi(u), \qquad (1.1)$$

где энергия R=(Ридберг)≅13.6 эВ – энергия электрона на первом боровском радиусе атома водорода, I- энергия ионизации, n_l - число эквивалентных электронов в оболочке атома, l - орбитальное квантовое число, E -энергия ионизирующего электрона, а $u=(E-I)/I$. Функция $\Phi(u)$ в борновском приближении, справедливом, когда кинетическая энергия электрона велика (u>1), равна

$$\Phi(u>1) = \frac{0.57}{u+1} \ln \frac{u+1}{0.012}. \qquad (1.2)$$

Сечения ионизации электронным ударом для употребительных на практике газов показаны на рис. 1.1.

Сечения фотоионизации обычно на два - три порядка ниже сечений ионизации электронным ударом.

В качестве примера приведем формулу для расчета сечения фотоионизации водорода или водородоподобного иона[5]:

$$\sigma_{ph} = 2^9 \frac{\pi^2}{3} \frac{\alpha a_B^2}{Z^2} \left(\frac{\omega_{th}}{\omega}\right)^4 \frac{exp(-4\kappa\, arctg\,\kappa)}{1-exp(-2\pi\kappa)}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{\omega}{\omega-\omega_{th}}}, \qquad (1.3)$$

где $\alpha = 1/137$ - постоянная тонкой структуры, ω - круговая частота фотона, ионизирующего атом, ω_{th} - граничная частота, ниже которой ионизация невозможна. Для водорода граничная частота, измеренная в обратных сантиметрах, как это обычно делают в спектроскопии, равна 109678,758 см$^{-1}$. Любопытно отметить, что, в отличие от сечения ионизации электронами, сечение фотонной ионизации не обращается в ноль на пороге, а стремится, как легко проверить, к конечному пределу. Сечение фотоионизации атома водорода фотонами, энергия которых много больше энергии связи электрона в атоме, можно определить с помощью гораздо менее громоздкой формулы [6]:

$$\sigma_{ph}[см^2] = 23.8\, \lambda_{[см]}^{7/2}.$$

Сечение фотоионизации для сильновозбужденных состояний с главным квантовым числом n уменьшается пропорционально n^{-5}.

Наконец. отметим, что для ионизации атомов в электрическом поле (полевая ионизация) пороговое значение поля составляет $E \sim 10^8$ В/см, а ионизация из возбужденных состояний возможна при меньших полях $E \sim 10^6$ В/см.

§2. Квазинейтральность, плазменная частота

Плазма в целом должна быть электрически нейтральна, количества разноименных зарядов в достаточно большой единице ее объема равны. В противном случае возникнут электрические поля, тем большие, чем больше дисбаланс зарядов, а создание таких полей требует совершения работы по разделению зарядов. Очевидно, что при отсутствии внешних воздействий эта работа может производиться только за счет кинетической энергии самих заряженных частиц.

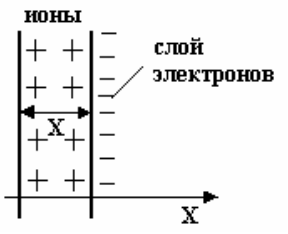


Рис. 1.2. Схема разделения зарядов

Предположим, что в некотором объеме флуктуативно разошлись заряды (рис.1.2, считаем, что ионы покоятся, а электроны уходят), и оценим максимальное расстояние такого расхождения. Расходящиеся на расстояние x заряды создают электрическое поле $E=4\pi nex$. Здесь n - концентрация плазмы, а e - элементарный заряд (равный по величине заряду электрона). Сила со стороны поля, действующая на элементарный заряд, равна eE; работа по разделению зарядов на расстояние d оказывается равной:

$$A = \int_0^d eEdx = \frac{4\pi \cdot e^2 n}{2} d^2 , \qquad (1.4)$$

и она не может превышать кинетическую энергию теплового движения частицы, для одномерного движения, как известно, равную $(1/2)T$ (здесь, как это часто делается для краткости, мы используем обозначение T вместо произведения $k_БT$, измеряя, тем самым, температуру в энергетических единицах). Отсюда

$$d = \sqrt{\frac{T}{4\pi ne^2}} . \qquad (1.5)$$

На масштабах, меньших d, всегда будут возникать электрические поля; флуктуации неизбежны. А вот разойтись на расстояния, существенно большие чем d, частицы не могут. Поэтому плазма и является квазинейтральной - нейтральная в больших объемах, но всегда с электрическими полями на расстояниях масштаба d, зависящего от температуры и плотности плазмы. Величину d обычно называют *дебаевским радиусом* (см. следующий параграф).

Для термоядерной плазмы с параметрами $n \cong 10^{14}$см$^{-3}$, $T \cong 10^4$эВ, получаем $d \cong 5 \cdot 10^{-3}$см. Электрические поля разделения зарядов будут действовать на заряженные частицы. Полагая, что ионы покоятся, рассмотрим движение некоторого выделенного электрона в таком одномерном поле E (см. рис. 1.2). Уравнение движения электрона оказывается следующим

$$m_e \ddot{x} = -eE = -4\pi ne^2 x, \qquad (1.6)$$

и совпадает по виду с уравнением движения для одномерного осциллятора. Следовательно, электрон будет совершать колебания с частотой

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi ne^2}{m_e}} . \qquad (1.7)$$

Эту частоту, являющуюся характерной особенностью плазмы, называют плазменной (и обозначают в этом случае как ω_p или ω_0) или электронной ленгмюровской частотой (и обозначают как ω_{Le}). Следует подчеркнуть, что она не зависит от температуры.

Для термоядерной плазмы с плотностью $n \cong 10^{14}$см$^{-3}$ частота ленгмюровских колебаний оказывается равной $\omega_p \cong 6 \cdot 10^{11}$с$^{-1}$.

§ 3. Дебаевский радиус, дебаевский слой

Каждая заряженная частица в плазме взаимодействует с другими заряженными частицами. Поэтому распределение потенциала φ электростатического поля выделенной частицы и окружающих её частиц зависит от пространственного расположения этих частиц. В поле данной частицы плотность заряженных частиц в равновесии должна быть распределена по закону Больцмана

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{e\varphi}{T}\right), \qquad (1.8)$$

где n_0 – концентрация частиц невозмущенной плазмы вдали от выделенной частицы, φ - потенциал электростатического поля.

Напишем теперь уравнение Пуассона (в сферической системе координат) для поля частиц плазмы, окружающих выделенную частицу:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) = -4\pi e(Zn_i - n_e),$$

где $n_{i,e}$ – концентрация ионов и электронов плазмы соответственно, Z – кратность ионизации иона плазмы. Для определенности считаем, что плазма состоит из электронов и одинаковых положительно заряженных ионов с одинаковой кратностью ионизации.

Для многокомпонентной плазмы с ионами разных сортов и с разной кратностью ионизации необходимо было бы в правой части производить суммирование по всем сортам и всем кратностям ионизации частиц. Соответствующее обобщение очевидно и может быть без труда получено, поэтому, чтобы не усложнять формы записи окончательных результатов, здесь ограничимся указанной простой моделью двухкомпонентной ион-электронной плазмы.

Учтем, что плотности электронов и ионов в поле выделенной частицы подчиняются закону Больцмана (1.8), и предположим, что температуры T_e и T_i распределений электронов и ионов плазмы могут быть разными. Ограничиваясь линейным приближением, т.е. считая $|e\varphi| \ll T_{e,i}$, разложим входящие в распределения Больцмана экспоненты в ряд. Учитывая квазинейтральность плазмы, т.е. выполненным условие $Zn_{oi}=n_{oe}$, получим упрощенное выражение для уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2}{r\partial r^2}(r\varphi) = \frac{4\pi Ze(n_e T_e + n_i T_i)}{T_e T_i}\varphi \equiv \frac{\varphi}{d^2}, \qquad (1.9)$$

где обозначено

$$d = \sqrt{\frac{T_e T_i}{4\pi Ze^2(T_e n_e + T_i n_i)}} \qquad (1.10)$$

- радиус Дебая - Хюккеля.

Решение уравнения (1.9) (потенциал Дебая – Хюккеля) имеет следующий вид:

$$\varphi = \frac{q}{r}e^{-r/d}, \qquad (1.11)$$

где q - заряд выделенной нами “пробной” частицы. Если это положительно заряженный ион с кратностью ионизации Z, то $q=Z|e|$.

Вблизи частицы, на расстояниях $r \ll d$, потенциал поля совпадает с потенциалом поля, создаваемого частицей в вакууме ($\varphi \approx q/r$), а на расстояниях $r \gg d$ поле экспоненциально быстро затухает. В этом случае говорят, что на таких расстояниях от частицы плазма экранирует создаваемое частицей электрическое поле. Поэтому уравнение (1.9) иногда называют *уравнением экранировки*.

Поместим в плазму плоский электрод, имеющий потенциал φ по отношению к другому плоскому электроду, удаленному от первого на расстояние x>>d (рис.1.3). Примем для простоты, что плазма является изотермической $T_e=T_i$, и состоит из электронов и однозарядных ионов с кратностью ионизации $Z=1$, так что условие квазинейтральности записывается теперь в виде $n_{oi}=n_{oe}=n_o$. Тогда уравнение Пуассона для распределения потенциала вблизи электрода с учетом (1.8) будет следующим:

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 4\pi e(n_i - n_e) = -8\pi e n_0 sh\left(\frac{e\varphi}{T}\right). \qquad (1.12)$$

Предполагается, что ось x системы координат перпендикулярна к электроду.

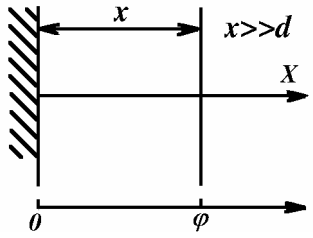


Рис.1.3. Схема расположения электродов

Решение этого уравнения в предположении, что $e\varphi/T<<1$, имеет следующий вид:

$$E = E_o e^{-x/d},$$

где E_o - напряженность поля на поверхности пластины, расположенной при x=0 [7]. Мы видим, что напряженность электрического поля, проникающего в плазму, экспоненциально быстро затухает. Характерной величиной длины затухания является радиус Дебая:

$$d = \sqrt{\frac{T}{8\pi n e^2}}. \qquad (1.13)$$

Более сложная картина возникает, если в плазму помещено изолированное незаряженное тело (например, пластина, см. рис. 1.4).

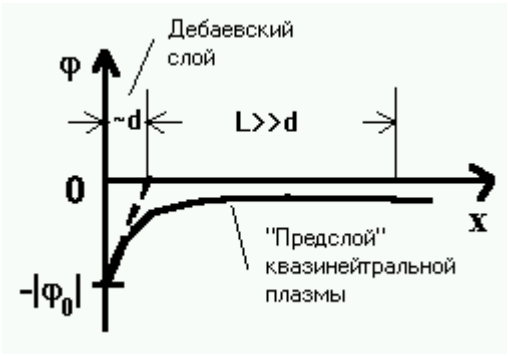


Рис. 1.4. Распределение потенциала вблизи помещенной в плазму пластины.

Такое тело в плазме должно заряжаться, причем, ввиду гораздо большей подвижности электронов, обычно оно приобретает отрицательный - так называемый *плавающий* – потенциал. Вблизи пластины, как показывают численные расчеты [8], возникает сложное распределение потенциала, качественно показанное на рис. 1.4. Вблизи пластины, как и в предыдущем примере, возникает дебаевский слой с существенным разделением заряда. Размер этого слоя примерно равен дебаевскому радиусу (1.10). Однако поле, согласно результатам расчетов, проникает в плазму гораздо дальше, образуя вблизи пластины “предслой” квазинейтральной плазмы. Теория этой структуры сложна и здесь ее обсуждать не будем.

Плавающий потенциал, который приобретает тело, хорошо описывается формулой

$$\left|e\varphi_0\right| = \frac{1}{2} T_e \ln\left(\frac{m_i}{m_e}\frac{T_e}{T_i}\right). \qquad (1.14)$$

Такой результат несложно получить из следующих простых соображений. Если с течением времени потенциал изолированной пластины перестает меняться, то это означает, что токи приходящих на нее положительных и отрицательных зарядов компенсируются. Оценивая плотность потока ионов вдали от тела как

$$j_i = \frac{1}{4} n_0 v_{Ti},$$

а плотность потока электронов с учетом их торможения “на потенциальной горке” как

$$j_e = \frac{1}{4} n_0 v_{Te} \exp\left(-\frac{|e\varphi_0|}{T_e}\right),$$

и приравнивая их, приходим к формуле (1.14).

Вернемся к формуле (1.10). Если в ней положить, что $n_e=n_i$ и $T_e=T_i$, то получим выражение (1.13). Если же считать, что плазма является сильно неизотермической, так что $T_i>>T_e$, то получим выражение, совпадающее с формулой (1.5) (теперь с температурой T_e в качестве T), и отличающееся от выражения, определяемого формулой (1.13), всего в $\sqrt{2}$ раз. Поэтому в любой плазме пространственные масштабы экранирования электрических полей и флуктуативного разделения зарядов примерно одинаковы. При этом радиус экранирования поля пробного заряда или длина слоя экранирования внешнего электрического поля совпадают. Так же, как и наличие ленгмюровских колебаний с плазменной частотой, экранирование электрических полей - важная характерная особенность плазмы.

Подчеркнем в заключение еще одно важное обстоятельство. В предыдущем параграфе при выводе формулы для ленгмюровской частоты пренебрегалось возможностью вовлечения в движение ионов, просто как значительно более массивной компоненты плазмы. Нетрудно отказаться от этого предположения и фактически повторяя этот вывод, но, учитывая теперь конечность отношения масс частиц, можно показать, что полная формула, вместо (1.7), для частоты плазменных колебаний оказывается следующей:

$$\omega_p = \sqrt{\omega_{Le}^2 + \omega_{Li}^2}, \omega_{Le} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}}, \omega_{Li} = \sqrt{\frac{4\pi Z^2 e^2 n_i}{m_i}},$$

где $\omega_{Le,Li}$ можно назвать «электронной» и «ионной» ленгмюровскими частотами. Чтобы подчеркнуть, каким образом входят параметры компонент плазмы в формулу (1.10) для дебаевского радиуса, перепишем ее в виде:

$$\frac{1}{d} = \sqrt{\frac{1}{r_{De}^2} + \frac{1}{r_{Di}^2}}, r_{De} = \sqrt{\frac{T_e}{4\pi e^2 n_e}}, r_{Di} = \sqrt{\frac{T_i}{4\pi Z^2 e^2 n_i}},$$

где $r_{De,i}$ – «электронный» и «ионный» дебаевские радиусы. Как мы видим, обе компоненты плазмы дают вклад и в плазменную частоту и в радиус экранирования. Но этот вклад оказывается неодинаковым: в величину радиуса экранирования при сопоставимых концентрациях и температурах ионы и электроны плазмы дают равноправный вклад, тогда как в величину плазменной частоты ввиду гораздо меньшей массы определяющий вклад дает электронная компонента. Эта «неравноправность» электронной и ионной компонент плазмы имеет простое объяснение. Дебаевский радиус является по существу *статической* характеристикой, определяющей установившуюся длину экранирования электростатического поля, он не зависит от массы частиц, так как за достаточно большое время успевают перестроится обе компоненты плазмы, несмотря на существенное различие их масс. В то время как ленгмюровская частота – это *динамическая* характеристика, определяющая отклик плазмы на динамическое изменение поля. При «быстром включении» поля, очевидно, что в первую очередь будут откликаться значительно менее массивные электроны. По этой причине плазменная частота для ион-электронной плазмы мало отличается от электронной ленгмюровской частоты. Отметим, что по порядку величины $1/\omega_p$ есть время пролета дебаевского слоя тепловым электроном.

§ 4. Идеальность плазмы

По аналогии с газом плазму считают *идеальной*, если кинетическая энергия движения ее частиц существенно больше потенциальной энергии их взаимодействия. В газе потенциальная энергия взаимодействия частиц обусловлена силами Ван-дер-Ваальса, в плазме - кулоновским взаимодействием. Энергия кулоновского взаимодействия двух частиц с зарядом e, находящихся на расстоянии R друг от друга, равна e^2/R. Среднее расстояние между частицами при плотности плазмы n составляет $R \sim n^{-1/3}$, а кинетическая энергия частицы по порядку величины равна температуре T, измеряемой в энергетических единицах. Таким образом, условие идеальности плазмы можно сформулировать следующим образом:

$$e^2 n^{1/3} << T ,$$

или

$$\gamma = \frac{e^6 n}{T^3} << 1 , \qquad (1.15)$$

где γ - так называемый параметр неидеальности.

Этому условию можно придать и несколько иной смысл. Сечение кулоновского взаимодействия частиц определяется амплитудой рассеяния, по порядку величины равной

$$f \sim \frac{e^2}{T} .$$

Очевидно, плазма является идеальной, если амплитуда рассеяния значительно меньше среднего межчастичного расстояния (в противном случае существенны корреляции взаимного расположения частиц)

$$f << R \sim n^{-1/3},$$

и вновь приходим к критерию (1.15).

Полезно условию идеальности плазмы придать более наглядный смысл, для этого поступим следующим образом. Выделим в объеме плазмы шар с радиусом, равным радиусу Дебая, и подсчитаем число частиц N_D, содержащихся в этом шаре:

$$N_D = \frac{4}{3}\pi n r_D^3 \sim \gamma^{-3/2} . \qquad (1.16)$$

Сравнив с критерием (1.15), приходим к заключению, что плазма является идеальной, если число частиц в шаре с дебаевским радиусом велико. Часто именно число N_D используется в качестве меры идеальности или неидеальности плазмы.

Проиллюстрируем полученный результат численным примером. Например, для значений температуры и плотности, типичных для термоядерной плазмы (см. §2), получаем $N_D \sim 10^8 >> 1$, и такая плазма является в высокой степени идеальной. Тогда как для плазмы линейной молнии, типичная температура которой составляет $\sim 10^4$К, а концентрация примерно равна концентрации воздуха, $\sim 10^{19}$см$^{-3}$, получаем $N_D \sim 0.1$. Такая плазма является слабонеидеальной, способной к рождению самоподдерживающихся нелинейных структур. Возможно, как полагают, именно такова природа шаровой молнии, возникающей часто при обычном грозовом разряде. Впрочем, детальный механизм этого природного явления пока окончательно не выяснен.

§ 5. Прямые и обратные процессы в плазме

Ранее мы установили, что в газе-плазме могут происходить неупругие процессы: возбуждение частиц, диссоциация молекул, ионизация частиц. Очевидно, что должны быть и обратные процессы - снятие возбуждения тем или иным путем (такие процессы часто называют *тушением*), объединение атомов в молекулы (обычно такой процесс называют *ассоциацией*), объединение электронов и ионов (*рекомбинация*). Прямые и обратные процессы могут осуществляться различными путями: для прямых процессов необходимо сообщить частицам достаточную энергию, чтобы разорвать удерживающие их связи, при обратных процессах должен выделиться избыток энергии порядка энергии связи. При этом необходимо выполнение законов сохранения энергии и импульса. Рассмотрим эти процессы подробнее.

Возбуждение и тушение

Возбужденные состояния возможны для всех сложных частиц - молекул, атомов, молекулярных и атомарных ионов (кроме иона атома водорода). В молекулах и молекулярных ионах могут быть возбуждены *вращательные, колебательные и электронные состояния,* а в атомах и атомарных ионах - только электронные. С энергетической точки зрения, наиболее легко возбуждаются вращательные уровни, труднее колебательные, еще труднее электронные. Если принять за единицу расстояние между электронными уровнями $\delta E_э$, то расстояние между колебательными уровнями δE_ν будет меньше в $\sqrt{\frac{m}{M}}$ раз, а между вращательными уровнями δE_j еще меньше: в $\frac{m}{M}$ раз, где M - масса молекулы, а m - масса электрона. Например, для молекулы H_2 расчетные значения энергий возбуждения соответствующих состояний $E_э$= 4,7 эВ, E_ν= 0,54 эВ, E_j= $7{,}6\cdot10^{-3}$ эВ.

Для возбуждения необходимо сообщить молекуле соответствующую энергию, например при соударении с другой частицей.

Схематично возбуждение при соударении с электроном симметричной двухатомной молекулы (H_2, N_2, O_2 и т.д.) показано на рис.1.5. В таких молекулах могут возбуждаться электронные, одна вращательная и одна колебательная степени свободы.

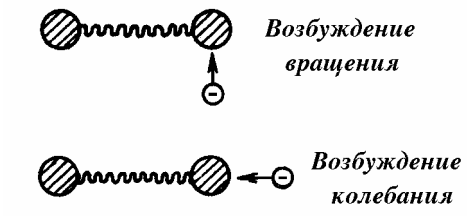


Рис.1.5. Схема возбуждения ударом

Очевидно, что в более сложных молекулах большее число возможных к возбуждению степеней свободы.

Существование вращательных и колебательных степеней свободы в молекулярных газах определяет основные свойства слабоионизованной плазмы этих газов и дает возможность использовать их в плазмохимических и лазерных системах. Дело в том, что сечения упругого и неупругого процессов при столкновении молекул с возбуждением колебательных степеней свободы почти одинаковы (отличаются лишь в несколько раз), а передаваемая от электрона энергия отличается в сотни и тысячи раз. При упругом соударении молекуле передается малая *(~m/M)* доля энергии электрона, а при возбуждении колебаний передается энергия, соответствующая энергии перехода, то есть масштаба десятых долей электрон-вольта. Колебательная релаксация - переход колебательной энергии в тепловую - весьма затруднена (при комнатной температуре - вероятность масштаба 10^{-5}-10^{-9}). Поэтому существуют системы с высокой колебательной температурой при малой поступательной (тепловой). Так можно обеспечить высокую *инверсную заселенность* колебательно-вращательных переходов, т.е. создать активную среду для лазеров.

Для слабоионизованной низкотемпературной плазмы характерно большое число колебательно-вращательно возбужденных молекул по сравнению с числом электронно-возбужденных. Заселение колебательно-вращательных уровней происходит активно при некоторых химических реакциях (например, горение углерода в кислороде с образованием CO - до 90% энергии ассоциации CO идет на возбуждение), в тлеющем разряде. Тушить возбуждение можно различными путями — излучением (используется в лазерах), частичным переходом энергии возбуждения в энергию химических связей (используется в плазмохимии). По мере повышения температуры газа увеличивается число частиц с электронным возбуждением.

В обычных условиях электрон находится в атоме, молекуле (или ионе) в основном состоянии, соответствующем минимуму его потенциальной энергии. Получив некоторую добавочную энергию (от фотона или другой частицы), электрон может перейти на более высоко лежащий энергетический уровень. Вероятность такого процесса определяется соответствующими сечениями возбуждения и сильно зависит от способа возбуждения. Возбуждение при соударении с частицами определяется величиной относительной скорости, зарядовым состоянием соударяющихся частиц и имеет резонансный характер. Возбуждение фотонами имеет четкий резонансный характер для атомов и атомарных ионов и более "размыто" для молекул.

В общем случае оценку вероятности процесса возбуждения электронов атомной частицы (атома, молекулы, иона) можно получить, сравнивая время взаимодействия частиц и время соответствующего перехода. Атомные частицы взаимодействуют своими электронными оболочками, и если сближение происходит медленно (т.е. относительные скорости атомных частиц малы по сравнению со скоростью электронов в атоме), то их электронные оболочки успевают постепенно перестроиться, а затем вернуться в исходное состояние. Если же время взаимодействия мало, то электроны за время $t_э$ "перебрасываются" на новый уровень, происходит возбуждение. Таким образом, возбуждение не происходит, если $t_{am} >> t_э$. По порядку величины $t_{am} = a/v$, где a - размер атома, а v - относительная скорость. По порядку величины $t_э$ можно определить из принципа неопределенности:

$$t_э = \hbar / \delta E,$$

где δE - разность энергий уровней. Поэтому получаем условие

$$a / v >> \hbar / \delta E$$

или

$$a \delta E / v\hbar >> 1,$$

что и является критерием маловероятности перехода и называется *адиабатическим критерием Месси.* Очевидно, что если разность уровней δE мала, то процесс более вероятен. Такие процессы называют резонансными (например, резонансная перезарядка, взаимная нейтрализация ионов, передача возбуждения).

Снятие электронного возбуждения возможно многими путями, например:

а) $A^* \rightarrow A + \gamma$ - *высвечивание* при возвращении электрона на основной уровень (возможно ступенчатое путем испускания ряда фотонов);

б) $A^* + BC \rightarrow A + BC$, $\searrow A + B + C$ - *тушение* при столкновении с молекулой, энергия возбуждения переходит или в кинетическую энергию частиц, или расходуется на диссоциацию молекулы. Тушение при соударении с атомом маловероятно;

в) $A^* + B \rightarrow AB^+ + e$ - *ассоциативная ионизация*. Энергия расходуется на ионизацию. Весьма вероятный процесс для некоторых состояний;

г) $A^* + B \rightarrow A + B^+ + e$ - *эффект Пеннига*; процесс происходит, если энергия возбуждения атома A^* в метастабильное состояние больше потенциала ионизации частицы B.

д) $A^* + B \rightarrow B^* + A$ - *передача возбуждения* реализуется с большой вероятностью, если мало изменение энергии перехода (резонансный процесс).

Видно, что некоторые пути тушения приводят к образованию ионов и электронов, т.е. к возрастанию степени ионизации плазмы.

Ионизация и рекомбинация

Процессы образования и разрушения заряженных частиц определяют существование плазмы. Для *ионизации* атомарной или молекулярной частицы необходимо сообщить хотя бы одному ее электрону энергию большую, чем энергия его связи с этой частицей. Энергия, необходимая для ионизации, выраженная в электрон-вольтах, числено равна разности потенциалов в вольтах, которую должен пройти электрон для ее приобретения. Поэтому часто говорят не об энергии ионизации, а о *потенциале ионизации*. Легче всего оторвать первый, как правило, внешний, электрон, второй и последующие - все труднее. Наибольший первый потенциал ионизации у He (24,5 В), наименьший у Cs (3,9 В). Второй потенциал обычно превышает первый в 2-3 раза, исключением являются щелочные металлы: наибольшая разница у Li (5,4 и 75,6 В соответственно).

Энергию ионизации можно сообщить при одиночном соударении с достаточно энергичной частицей (с электроном, атомом, ионом, фотоном), но ее можно передать и в процессе нескольких соударений, причем в каждом передается энергия меньше, чем необходимо для отрыва электрона. При каждом соударении частица получает энергию, переходит в более возбужденное состояние, а затем ионизуется уже из возбужденного состояния. Такая *ступенчатая ионизация* особенно важна в низкотемпературной плазме, когда энергия электронов меньше потенциала ионизации.

Процессом, обратным ионизации, является объединение иона и электрона - образование нейтральной частицы или понижение зарядности иона, его называют *рекомбинацией*.

При рекомбинации выделяется энергия, равная энергии связи рекомбинирующих частиц. Эта энергия может выделиться в виде излучения, или может быть передана третьей частице (обычно одному из электронов плазмы). В первом случае говорят о *рекомбинации с излучением (*или *излучательной рекомбинации)*, во втором - о *рекомбинации при тройных соударениях* (или *тройной рекомбинации*). Очевидно, что второй случай реализуется при высоких плотностях плазмы.

Для некоторых атомов (например, He) и возбужденных ионов существенно образование *автоионизационных состояний* и соответствующая рекомбинация. Автоионизационным состоянием называют связанное состояние возбужденного иона и электрона, если суммарная энергия возбуждения больше потенциала ионизации атома. Если возбуждено несколько электронов, и если энергия возбуждения будет передана одному электрону, то произойдет ионизация - электрон перейдет в свободное состояние, а ион останется в основном (невозбужденном) состоянии. Следует отметить, что время жизни частицы в автоионизационном состоянии значительно больше характерного атомного. Возможен и процесс, обратный ассоциативной ионизации - так называемая *диссоциативная рекомбинация:* $AB^+ + e \rightarrow A + B^+$*;* он проходит через автоионизационное состояние молекулы *AB**. Иногда рекомбинацией называют и ассоциацию молекул из атомов, т.е. процессы типа $A + 2B \rightarrow AB + B$, $A + B + C \rightarrow AB + C$, или $A + 2A \rightarrow A_2 + A$.

Диссоциация и ассоциация

Диссоциацией называют процесс разделения сложных молекул (или молекулярных ионов) на более простые молекулы, или на атомы (или ион и атом, ион и молекула). Энергия разрыва молекулярных связей почти всегда меньше энергии ионизации (за исключением, пожалуй, молекул CO_2 и C_2H_2). Часто диссоциацию облегчает накопление энергии на колебательно-вращательных уровнях молекулы.

Ассоциацией называют обратный процесс: объединение атомов (или иона и атома) в молекулу (или простых молекул в более сложные).

Следует отметить, что и диссоциация и ассоциация нередко бывают сложными, реально многостадийными, процессами: в них участвует не менее трех частиц, и простому прямому процессу диссоциации

$$AB + C \rightarrow A + B + C$$

соответствует сложный тройной процесс ассоциации

$$A + B + C \rightarrow AB + C,$$

когда частица AB образуется в возбужденном состоянии и переходит в основное состояние в результате ряда последующих парных столкновений.

§ 6. Упругое рассеяние

Если в процессе взаимодействия полная поступательная энергия частиц остается неизменной, то процесс является упругим рассеянием. В слабоионизованной плазме важны взаимодействия с нейтральными частицами. В первом приближении заряженные частицы взаимодействуют с нейтральными частицами так же, как и нейтральные частицы взаимодействуют между собой. Однако при более строгом подходе необходимо учитывать, что заряженная частица своим полем поляризует нейтральную частицу, и это усложняет характер взаимодействия. Сечение рассеяния определяется не только геометрическими размерами нейтральной частицы, но и ее поляризуемостью. Особенно большой поляризуемостью обладают атомы щелочных металлов и некоторые атомы в возбужденном состоянии. Поляризуемость молекул существенно ниже, она близка к поляризуемости не щелочных атомов. Вероятность упругого рассеяния нейтральных частиц слабо зависит от их относительных скоростей. Процессы переноса в слабо ионизованной плазме очень близки к таковым в газе, кроме, естественно, подвижности - направленной скорости заряженных частиц, приобретаемой ими под действием электрического поля.

Упругие столкновения заряженных частиц имеют иной характер, и в сильно ионизованной плазме именно они определяют форму функций распределения и процессы переноса. Рассмотрим поведение заряженной частицы (назовем ее пробной), пролетающей через облако покоящихся заряженных частиц (назовем их полевыми). В идеальной плазме каждое взаимодействие двух частиц можно рассматривать независимо от наличия остальных, но при вычислении полного сечения взаимодействия надо учесть экранирование плазмой поля данной частицы.

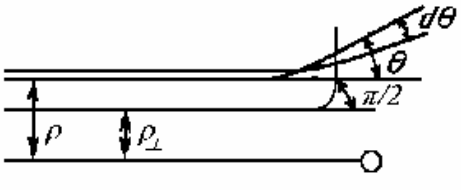


Рис.1.6. Схема упругого соударения

Если пробная частица движется так, что при отсутствии взаимодействия она пролетела бы мимо полевой на расстоянии ρ (его называют *прицельным параметром*, рис. 1.6), то она отклонится на угол θ, зависящий от приведенной массы частиц μ, их зарядов Z и относительной скорости v:

$$tg(\theta/2) = \rho_\perp/\rho, \qquad \rho_\perp = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\mu v^2} \quad (1.17)$$

где $\rho_\perp$ - прицельный параметр, при котором пробная частица отклоняется на угол $\pi/2$. По существу такое рассмотрение соответствует описанию движения одной частицы с приведенной массой μ в поле центральных сил. С помощью кинематического соотношения (1.17) выводится *формула Резерфорда*

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\rho}{\sin\theta}\left|\frac{d\rho}{d\theta}\right| = \left(\frac{\rho_\perp}{2\sin^2(\theta/2)}\right)^2 . \quad (1.18)$$

Скорость пробной частицы при упругом рассеянии меняется только по направлению, уменьшаясь в проекции на первоначальное направление на $\delta v = v(1-\cos\theta)$ и увеличиваясь в проекции на направление, перпендикулярное к начальной скорости на величину $\Delta v = v\cdot\sin\theta$. Каждая из них определяет значение коэффициентов переноса: Δv - диффузию, δv - вязкое трение и теплопроводность. Однако точные расчеты показывают, что интегральные сечения этих процессов отличаются незначительно и поэтому обычно рассматривают величину δv, ответственную за рассеяние. Проведя интегрирование δv по всем углам рассеяния θ (или по всем значениям прицельного параметра ρ), умножив на число полевых частиц в единице объема n и на путь пробной частицы dx, можно получить величину изменения скорости частицы в первоначальном направлении:

$$dv = -2\pi n v dx \int (1-\cos\theta)\rho d\rho ,$$

подставляя (1.18) и учитывая, что

$$sin^2\left(\theta/2\right) = \frac{\rho_\perp^2}{\rho^2+\rho_\perp^2},$$

окончательно получим:

$$dv = -4\pi n v dx \rho_\perp^2 \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{\rho_\perp^2+\rho^2}. \qquad (1.19)$$

Очевидно, что этот интеграл логарифмически расходится на верхнем пределе. Однако следует учесть, что реально выделенная нами полевая частица экранируется окружающей плазмой и ее поле быстро уменьшается с увеличением расстояния. Характерное расстояние экранирования - дебаевский радиус d, и интегрировать следует в пределах $0 < \rho < d$. Тогда получим

$$dv = -4\pi n v \rho_\perp^2 dx L_c, \qquad (1.20)$$

где

$$L_c = ln(d/\rho_\perp) \qquad (1.21)$$

- *кулоновский логарифм*. Величина L_c определяется рассеянием на малые углы, и обычно $L_c \approx 10 \div 20$ при изменении параметров плазмы в широких пределах.

Можно ввести *длину свободного пробега* λ и *сечение рассеяния* σ_c*:*

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{\lambda},$$

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma_c}, \qquad (1.22)$$

$$\sigma_c = 4\pi\rho_\perp^2 L_c.$$

Очень важно, что сечение рассеяния σ_c сильно зависит от энергии частицы, обратно пропорционально квадрату ее энергии (или квадрату температуры):

$$\sigma_c \sim \frac{1}{E^2} \sim \frac{1}{T^2}. \qquad (1.23)$$

Вводят и понятие *времени рассеяния* или *кулоновского времени*, определяя его как:

$$\tau_c = \frac{\lambda}{v} = \frac{1}{n\sigma_c v}. \qquad (1.24)$$

Легко видеть, что время рассеяния быстро растет с температурой

$$\tau_c \sim T^{3/2}. \qquad (1.25)$$

Другими словами, по мере роста температуры заряженные частицы рассеиваются медленнее.

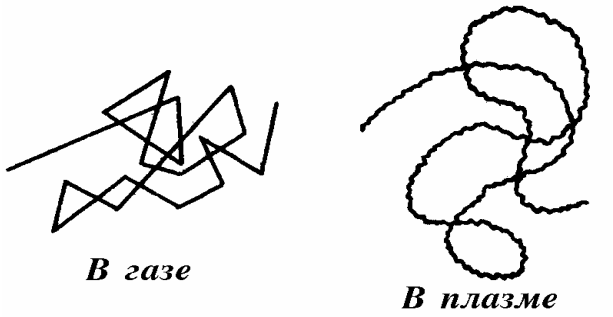


Рис.1.7. Траектории частиц

Траектория заряженной частицы в плазме существенно отличается от траектории нейтральной частицы в газе (рис. 1.7): в плазме - это медленно меняющаяся плавная кривая.

Перезарядка

Весьма важным является процесс передачи заряда от заряженной частицы к нейтральной:

$$A^+ + B \leftrightarrow A + B^+.$$

В случае тождественных частиц A и B (кроме зарядового состояния): $A \equiv B$ - это процесс упругий: полная кинетическая энергия обеих частиц сохраняется неизменной.

Если же $A \neq B$, то процесс перезарядки неупругий, так как энергии ионизации частиц A и B различны. Если потенциал ионизации нейтральной частицы больше потенциала ионизации заряженной частицы, то на величину энергии, соответствующую этой разнице, уменьшится полная кинетическая энергия частиц. В случае, если энергия ионизации заряженной частицы больше энергии ионизации нейтральной частицы, то избыток энергии выделится или в виде кинетической энергии частиц, или пойдет на возбуждение (у атомов последнее бывает редко).

§ 7. Равновесия в плазме

При *полном термодинамическом равновесии* должно установиться равенство скоростей всех прямых и обратных процессов, а также равенство всех температур (вращательных, колебательных, электронной, ионной, атомной). Такую сложную схему рассмотреть крайне трудно, а может быть и невозможно. Часто говорят о *частичных равновесиях* — при малых температурах по всем степеням свободы (кинетической энергии электронов и ионов, колебательным, вращательным состояниям), при больших, когда молекул и атомов уже практически нет, - отдельно о температурах хаотического движения электронов и ионов.

Рассмотрим примеры ионизационного равновесия в атомарном газе (рассмотрение молекул резко усложняет задачу: надо рассматривать колебательно возбужденные состояния, ассоциативную ионизацию и т.д.; не рассматриваем также и автоионизационные состояния). Простейшими, и одновременно наиболее часто встречающимися, являются следующие три случая.

Баланс между ионизацией электронным ударом и тройной рекомбинацией

Процесс (прямой/обратный)	Скорость процесса
$a+e \rightarrow i+2e$ (ионизация)	$w_i = k_i n_a n_e$
$i+2e \rightarrow a+e$ (рекомбинация)	$w_r = k_r n_i n_e^2$

Здесь n_a, n_i, n_e - плотности атомов, ионов и электронов соответственно; k_i, k_r - коэффициенты скорости ионизации и рекомбинации. Скорость производства, например, ионной компоненты в таких процессах определяется уравнением:

$$\frac{dn_i}{dt} = w_i - w_r. \tag{1.26}$$

В равновесии скорости прямого и обратного процессов совпадают, так что должно быть $w_i = w_r$. Поэтому константа равновесия K, которую определим как отношение коэффициентов скорости прямого и обратного процессов – здесь ионизации и рекомбинации, оказывается равной:

$$K = \frac{k_i}{k_r} = \frac{n_e n_i}{n_a}. \tag{1.27}$$

Заметим, что введенная таким образом константа равновесия имеет размерность куба обратной длины.

Баланс между фотоионизацией и излучательной рекомбинацией

Процесс (прямой/обратный)	Скорость процесса
$a+\gamma \rightarrow i+e$ (ионизация)	$w_i' = k_i' n_a j$
$i+e \rightarrow a+\gamma$ (рекомбинация)	$w_p' = k_p' n_i n_e$

Здесь n_a, n_i, n_e - плотности атомов, ионов и электронов соответственно, $k_i' j, k_p'$ - коэффициенты скорости фотоионизации и излучательной рекомбинации.

В равновесии

$$w_i' = w_p', \tag{1.28}$$

и константа равновесия, определенная так же, как и в предыдущем случае, оказывается

$$K = \frac{k_i' j}{k_p'} = \frac{n_i n_e}{n_a}, \tag{1.29}$$

(по принципу детального равновесия), так что в обоих случаях

$$K = \frac{n_i n_e}{n_a}. \tag{1.30}$$

Для определения соотношения числа заряженных и нейтральных частиц в плазме вводят понятие *степени ионизации* α (иногда этот параметр называют коэффициентом ионизации) - отношение числа ионов к сумме числа ионов и нейтральных частиц:

$$\alpha = \frac{n_i}{n_i + n_a} = \frac{n_i}{n_o}, \qquad n_0 = n_i + n_a, \tag{1.31}$$

где n_0 - полная концентрация ионов и атомов (начальная концентрация).

Легко установить связь между степенью ионизации и константой ионизационного равновесия K [9]. В предположении, что $n_i = n_e$, используя формулы (1.27), (1.30) и (1.31), получаем соотношение

$$n_i^2 = Kn_a = K\left(n_0 - n_i\right),$$

представляющее собой квадратное уравнение относительно n_i. Решив его и подставив результат в (1.31), выразим степень ионизации через константу равновесия и начальную концентрацию газа:

$$\alpha = -\frac{K}{2n_o} + \sqrt{\left(\frac{K}{2n_o}\right)^2 + \frac{K}{n_0}}. \tag{1.32}$$

При малой степени ионизации, когда концентрация ионов мала, $n_i << n_o$, находим $n_i \approx \sqrt{Kn_0}$, так что

$$\alpha = \frac{n_i}{n_0} \approx \sqrt{\frac{K}{n_o}}, \tag{1.33}$$

т.е. степень ионизации обратно пропорциональна корню квадратному из начальной плотности, так как константа равновесия является функцией только температуры газа.

При большой степени ионизации, когда концентрация нейтральных атомов мала, $n_i >> n_a$, получаем $\alpha \to 1$.

Баланс между ионизацией электронным ударом и излучательной рекомбинацией

В предыдущем примере предполагалось, что излучение заперто и не выходит из реакционного объема. Если же плазма прозрачна для излучения, т.е. её плотность достаточно мала, то мала скорость фотоионизации, и ионизация главным образом обусловлена соударениями. В плазме малой плотности маловероятны и тройные соударения, поэтому главным конкурирующим с ионизацией процессом является излучательная рекомбинация:

Процесс (прямой/обратный)	Скорость процесса
$a+e \to i+2e$ (ионизация)	$w_i = k_i n_a n_e$
$i+e \to a+\gamma$ (рекомбинация)	$w_p' = k_p' n_i n_e$

Приравнивая скорости прямого и обратного процессов, получим *формулу Эльверта:*

$$K' = \frac{n_i}{n_a} = \frac{k_i}{k_p'}, \tag{1.34}$$

из которой видно, что степень ионизации

$$\alpha = \frac{K'}{1 + K'} \tag{1.35}$$

является функцией только от температуры и не зависит от плотности.

Для плазмы, находящейся в термодинамическом равновесии, константа равновесия К может быть получена как по аналогии с константой химического равновесия, так и из кинетических соображений [9], и оказывается равной:

$$K = \frac{n_e n_i}{n_a} = \frac{g_i g_e}{g_a}\left(\frac{m_e' T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{-I/T},$$

где g_i, g_e, g_a — статистические веса ионов, электронов и атомов соответственно; I - энергия ионизации атома, $m'_e = m_e m_i / (m_e + m_i)$ - приведенная масса. Отвечающая этому равновесию степень ионизации α, как легко вывести, определяется соотношением

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} = \frac{g_i g_e}{g_a}\left(\frac{m'_e T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{T}{p} e^{-I/T}, \qquad (1.36)$$

где $p = (n_e+n_i+n_a)T$ - давление, определяемое числом частиц всех сортов в единице объема. Подчеркнем, что, как и должно быть в условиях полного термодинамического равновесия, равновесная степень ионизации является функцией температуры и давления плазмы.

Формула (1.36) - *формула Саха* - связывает основные фундаментальные характеристики взаимодействующих частиц: приведенную массу (для процесса ионизации она примерно равна массе электрона m_e с точностью до малого отношения m_e/m_i, где m_i - масса иона), статистические веса частиц (иона, электрона, атома), энергию ионизации атома и температуру плазмы с константой равновесия K. Фундаментальные характеристики хорошо известны: статистический вес электрона равен двум, а статистические веса атома и иона рассчитываются независимо. Они равны числу состояний с данным главным квантовым числом, например, для атома водорода, в состоянии с главным квантовым числом, равным n, статистический вес равен $2n^2$.

Хотя формула Саха (и ее аналоги) применима к плазме, находящейся в полном термодинамическом равновесии, ее используют при оценке и для плазмы в случае неполного термодинамического равновесия. Следует иметь в виду, кроме того, что она верна лишь при некоторых упрощающих предположениях относительно этого равновесия: газ считается классическим, подчиняющимся распределению Максвелла-Больцмана. Тем самым, наименьшая длина волны де Бройля, электронная, должна быть меньше среднего межчастичного расстояния. Плазма должна быть разреженной на столько, что среднее расстояние между частицами велико по сравнению с амплитудой рассеяния. Тогда электроны, ионы и атомы можно рассматривать как смесь идеальных газов. Наконец, температура этой смеси должна быть мала в сравнении с энергией ионизации – только при этом условии количество возбужденных атомов мало по сравнению с числом атомов в основном состоянии. В некоторых условиях оказывается существенной ступенчатая ионизация - образование заряженных частиц из возбужденных атомов, постепенно "довозбуждаемых" при столкновениях через последовательность возбужденных состояний до ионизации. Реализация этой возможности зависит от времени жизни возбужденных атомов, плотности электронов, потенциалов ионизации атомов в основном и в возбужденных состояниях.

Реально с полностью термолизованной плазмой сталкиваются, пожалуй, только астрофизики, да и, возможно, при атомных и термоядерных взрывах. В термоядерных установках стремятся получить такую термолизованную плазму; наиболее близки к ней плазмы в импульсных "взрывных" системах. В системах с магнитной термоизоляцией (адиабатических ловушках, токамаках и т.д.) плазмы всегда неравновесные, хотя иногда и осуществляется частичное равновесие - устанавливаются функции распределения, близкие к максвелловским, свои для электронов и свои для ионов.

§ 8. Неравновесность плазменных систем

Обычно в плазме всегда есть частицы, очень сильно различающиеся по массе: тяжелые молекулы, атомы и их ионы, и значительно более легкие электроны (отношение масс протона и электрона равно $m_p/m_e \cong 1836$). Взаимодействие тяжелых и легких частиц не симметрично: легкие частицы сильно рассеиваются на тяжелых и очень медленно передают им свою энергию, тогда как тяжелые частицы на легких частицах почти не рассеиваются, но довольно интенсивно тормозятся. В большинстве случаев плазму создают, применяя электрическое поле: или прямо помещая в газ электроды с некоторой разностью потенциалов (например, дуговые плазмотроны, приборы с тлеющим разрядом, *Z*-пинчи и т.д.), или индуктивно наводя переменную ЭДС в объеме (например, СВЧ-плазмотроны, θ-пинчи, токамаки и т.д.). Подвижности электронов и ионов в электрическом поле сильно различаются, сечения взаимодействия их с атомарными частицами разные, и обычно электроны в электрическом поле приобретают большую энергию, чем ионы. В различных по конструкции системах разряды развиваются по-разному, но, как правило, не только направленные скорости, но и энергия, приобретаемая электроном в разряде, больше энергии, приобретаемой ионом. Особенно четко это проявляется в слабоионизованной плазме газового разряда. Рассмотрим в качестве примера положительный столб слабоионизованной плазмы тлеющего разряда (§ 51), степень ионизации которого составляет ~0.01.

Это участок разряда, где потенциал меняется наиболее плавно и напряженность электрического поля примерно постоянная. В типичных условиях тлеющего разряда напряженность поля не превышает 1-10 В/см, а давление газа составляет 1-10 Торр. Поскольку плазма является слабоионизованной, можно считать, что заряженные частицы сталкиваются главным образом с нейтральными атомами, а столкновениями ионов и электронов между собой можно пренебречь. Сечения упругих столкновений медленных ионов и электронов с атомами и молекулами газа можно считать независящими от энергии частиц. Конечно, величины сечений зависят от рода газа, в котором производится разряд, но в типичных условиях сечение упругого рассеяния для ионов может достигать величины $\sigma_i \sim 10^{-14}$см^2, тогда как для электронов оно примерно на порядок меньше $\sigma_i \sim 10^{-15}$см^2. В этих условиях средняя длина свободного пробега $\lambda_{e,i} \sim 1/n_a\sigma_{e,i}$, где n_a плотность газа, оказывается масштаба $\lambda_i \sim 10^{-4}$-10^{-3}см и $\lambda_e \sim 10^{-3}$-10^{-2}см для ионов и электронов соответственно. Температура газа обычно примерно равна ионной температуре и для разряда малой мощности порядка комнатной температуры, т.е. равна примерно 0.03 эВ, тогда как электронная температура значительно больше и составляет ~1эВ. Обсудим причину такого неравновесия.

Под действием электрического поля с напряженностью *E*, ион приобретает на длине свободного пробега между соударениями энергию

$$\Delta\varepsilon_i = eE\lambda_i, \qquad (1.37)$$

а электрон энергию

$$\Delta\varepsilon_e = eE\lambda_e. \qquad (1.38)$$

Считаем, что ионы – однозарядные, так что по модулю заряд иона равен заряду электрона. Для приведенных выше параметров оценка дает для этих величин

$\Delta\varepsilon_i \cong 10^{-4}$-$10^{-3}$эВ, $\Delta\varepsilon_e \cong 10^{-3}$-$10^{-2}$эВ.

Под действием электрического поля и ионы, и электроны приобретают направленную скорость, которую можно оценить как

$$< \Delta u_i > \cong \frac{eE}{m_i}\tau_i, \qquad < \Delta u_e > \cong -\frac{eE}{m_e}\tau_e. \qquad (1.39)$$

В формулах (1.39) время между столкновениями для электронов и ионов с нейтральными частицами

$$\tau_{e,i} = \frac{\lambda_{e,i}}{< v_{e,i} >}, \quad < v_{e,i} >= \sqrt{\frac{2 < \varepsilon_{e,i} >}{m_{e,i}}}, \tag{1.40}$$

где $\langle \varepsilon_{e,i} \rangle$ - средняя энергия электронов и ионов соответственно. Ввиду гораздо большей подвижности электронов (из-за малой массы), по величине их направленная скорость значительно больше направленной скорости ионов. Средняя энергия иона будет практически равна средней энергии нейтральных частиц, так как, приобретая между соударениями малую дополнительную энергию порядка $\Delta\varepsilon_i$, ион при соударении с атомами ее отдает, а последние, получившие энергию при соударении, переносят ее на стенки. Электрон же, приобретая между соударениями энергию большую, чем ион, при соударении с атомами теряет лишь малую часть, порядка $(m_e/m_a)\langle \varepsilon_e \rangle$, своей средней энергии $\langle \varepsilon_e \rangle$. Но в стационарных условиях именно эта малая потеря энергии и ограничивает набор энергии электронами в поле. Поэтому среднюю энергию электронов можно оценить, потребовав баланса энергии, приобретаемой в поле и теряемой при столкновениях с атомами:

$$\frac{m_e}{m_a}\langle \varepsilon_e \rangle \cong \frac{m_e \langle \Delta u_e \rangle^2}{2} = \frac{m_e}{2}\left(\frac{eE}{m_e}\tau_e\right)^2. \tag{1.41}$$

Поскольку входящее в эту формулу характерное время между столкновениями электрона с нейтральными частицами τ_e в свою очередь, согласно (1.40), зависит от средней энергии электронов, то, выразив из (1.41) $\langle \varepsilon_e \rangle$ в явном виде, получим

$$\langle \varepsilon_e \rangle \cong \frac{1}{2} eE\lambda_e \sqrt{\frac{m_a}{m_e}}. \tag{1.42}$$

Полученный результат лишь численным коэффициентом (1/2 вместо 0.43) отличается от результата решения кинетического уравнения, приведенного в [20]. Сравнив (1.42) и (1.38), мы видим, что средняя энергия электронов после многих столкновений оказывается значительно больше (примерно в корень из отношения масс нейтральной частицы и электрона) величины дополнительной энергии, приобретаемой электроном на длине свободного пробега. Поэтому главной причиной “перегрева” электронов по сравнению с ионами является, по существу, не только набор ими несколько большей энергии на длине свободного пробега, а гораздо более слабый темп потерь полученной в поле энергии при столкновениях с атомами.

При больших напряженностях поля средняя энергия (1.42) существенно выше температуры газа. Как упоминалось ранее, это обеспечивает инверсную заселенность в молекулярных газах, правда, только при низких температурах газа: вероятность колебательной релаксации очень быстро возрастет с температурой. Поэтому и приходится охлаждать лазеры, делать системы с протоком газа, т.е. обеспечивать условия, при которых температура хаотического движения молекул существенно ниже, чем «колебательная» температура возбужденных атомов. Например, в лазерах на окиси углерода при комнатной температуре газа достижимы колебательные температуры, равные $7000 - 8000$ К. Неравновесность, при которой средняя энергия электронов составляет единицы электрон-вольт, и температура основной среды, которая немного больше комнатной, обеспечивают и возможность интенсивного проведения некоторых химических реакций. Электроны передают энергию на возбуждение колебательных степеней свободы молекул, а высокая колебательная температура обеспечивает и высокие скорости химических реакций. Необходимо отметить, что при этом существенно возрастает и КПД по выходу конечного продукта установок, основанных на газовом разряде: электронное возбуждение обеспечивает передачу энергии именно на “нужные”

степени свободы, а не равномерно на все. Так КПД CO_2-лазера довели до ~25%, затраты энергии при получении NO из N_2 и O_2 снизили в 6-7 раз.

Мы рассмотрели неравновесность слабоионизованной плазмы. Но и практически полностью ионизованная горячая плазма тоже, как правило, не равновесная. Например, в известных токамаках устанавливаются разные температуры электронов и ионов, не говоря уже об отсутствии равновесия с излучением.

§ 9. Процессы релаксации в плазме

Процессы релаксации приводят к установлению максвелловской функции распределения частиц по энергиям, т.е. термодинамического равновесия, когда можно говорить о температуре. В слабоионизованной плазме температура ионов равна температуре газа, массы ионов и атомов практически одинаковы. Температура электронов может быть другой, чем у атомов газа, даже тогда, когда электронов очень мало [8].

В полностью ионизованной плазме практически есть только электроны и ионы. Равновесие будет устанавливаться вследствие кулоновских соударений заряженных частиц. Так как массы ионов и электронов сильно различны, то рассмотрим отдельно электрон-электронные и ион-ионные взаимодействия. Предположим, что K соударений приводят к максвеллизации данного, например, электронного ансамбля. Тогда время установления максвелловского распределения среди электронов

$$\tau_{ee} = K \frac{1}{n v_{Te} \sigma_c} . \qquad (1.43)$$

где σ_c кулоновское сечение, а v_{Te} – тепловая скорость электронов. Подставляя значение кулоновского сечения σ_c из (1.23) и $v_{Te} = \sqrt{3T_e/m_e}$ **,** получим:

$$\tau_{ee} = K \frac{3\sqrt{3}}{4\pi e^4 L_c} \frac{\sqrt{m_e}}{n} T_e^{3/2} . \qquad (1.44)$$

Строгий расчет показывает, что $K<2$. Аналогичный расчет для ионов дает

$$\tau_{ii} = K \frac{3\sqrt{3}}{4\pi Z_1^2 Z_2^2 e^4 L_c} \frac{\sqrt{m_i}}{n} T_i^{3/2} , \qquad (1.45)$$

где $Z_{1,2}$ - кратности ионизации. Сравним τ_{ee} и τ_{ii}: для равных температур $T_e=T_i$, предполагаем $Z_1=Z_2=1$:

$$\frac{\tau_{ee}}{\tau_{ii}} = \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} .$$

Откуда следует $\tau_{ee} << \tau_{ii}$.

Приведенные формулы для характерных времен столкновений, конечно, имеют лишь характер оценки. Детальный расчет [11] показывает, что при кулоновском столкновении заряженной частицы сорта *"α"* с заряженной частицей сорта *"β"* характерное время между столкновениями (время торможения) оказывается равным

$$\tau_{\alpha\beta} = 3/4(2\pi)^{-1/2}[T_\alpha^{3/2}/(e_\alpha^2 e_\beta^2 L_c n_\beta)] m_\alpha \mu_{\alpha\beta}^{-1/2}, \ \mu_{\alpha\beta} = m_\beta m_\alpha/(m_\beta+m_\alpha), \qquad (1.46)$$

где e_α, e_β - заряды этих частиц, m_α, m_β - массы, а $\mu_{\alpha\beta}$ - приведенная масса. Здесь индексы α и β обозначают сорт плазменных частиц. Используя эту общую формулу, можно получить характерные времена электрон-электронных, электрон-ионных и ион-ионных столкновений. Например, для плазмы из электронов и однозарядных ионов получаем следующий набор характерных времен:

$$\tau_{ei} = 3/4(2\pi)^{-1/2}[T_e^{3/2}/(e^4 L_c n)] m_e^{1/2}, \ \tau_{ee} = 2^{1/2} \tau_{ei}, \ \tau_{ii} = (2m_i/m_e)^{1/2}(T_i/T_e)^{3/2} \tau_{ei}. \qquad (1.47)$$

Отметим, что приведенные характерные времена отвечают разным процессам, ведущим к релаксации первоначально неравновесного распределения плазменных частиц к равновесному. В частности, время τ_{ei}

электрон-ионных столкновений отвечает времени торможения (точнее, потери направленной скорости) электронов в среде ионов, тогда как время τ_{ie} отвечало бы времени торможения ионов на электронах. Очевидно, эти времена существенно различаются. Для наглядности представим, что мяч для настольного тенниса влетает в облако арбузов среднего размера; мяч будет долго метаться между арбузами, почти не сдвигая их с места. И наоборот, арбуз, влетающий в облако таких мячей, будет двигаться, практически не меняя направления, но расшвыривая мячи и замедляя свою скорость. В плазме частицы - заряженные, характер взаимодействия иной, но качественно картина аналогичная.

Таким образом, самое короткое из релаксационных времен – это время, за которое электроны теряют направленную скорость в столкновениях с ионами. Время максвеллизации электронной подсистемы, то есть установления электронной температуры T_e в $\sqrt{2}$ раз больше. Следующий по длительности процесс – максвеллизация ионной подсистемы плазмы. Длительность этого процесса, в течение которого устанавливается ионная температура T_i, примерно в $\sqrt{m_i/m_e}$ (~50 для водородной плазмы) раз больше.

В общем случае T_e и T_i могут оказаться различными. Для определения характерного времени электрон-ионной или ион-электронной релаксации по температуре, то есть установления единой, как и должно быть при полном термодинамическом равновесии, температуры всех компонент плазмы, следует учесть, что из-за сильного различия масс при столкновении электрона и иона передается весьма малая доля энергии, порядка отношения масс, m_e/m_i. Поэтому этот процесс еще более длительный. В общем случае длительность этого процесса составляет[10]:

$$\tau_\varepsilon = \frac{3(m_e T_i + m_i T_e)^{3/2}}{8\sqrt{2\pi m_e m_i}\, n (e_i e_e)^2 L_c}. \qquad (1.48)$$

Например, в плазме, нагреваемой током, когда выделение джоулева тепла происходит главным образом в электронной подсистеме, быстрее всего установится температура электронов, затем - температура ионов (ниже электронной) и очень долго будет устанавливаться (реально часто не успевает установиться) единая температура. В этом случае часто говорят о наличии “отрыва” электронной и ионной температур.

В формуле (1.48) T_e и T_i имеют смысл начальных температур на стадии предшествующей процессу релаксации. Любопытно, какая температура установится после завершения этого процесса? Чтобы ответить на этот вопрос, запишем уравнения баланса. В простейшем случае они записываются в виде:

$$\frac{dT_e}{dt} = -\frac{T_e - T_i}{\tau_\varepsilon}, \quad \frac{dT_i}{dt} = \frac{T_e - T_i}{\tau_\varepsilon}.$$

Эти уравнения описывают передачу энергии между электронной и ионной подсистемами. Поскольку, как здесь предполагается, в целом нет потерь энергии с передачей ее окружающим телам, то сохранение энергии приводит к соотношению

$$T_e + T_i = T_{e0} + T_{i0} = const.$$

По завершении процесса релаксации в системе должна установиться температура T, общая для ионов и электронов, так что будет $T_e=T_i=T$. В результате получаем $T=(T_{e0}+T_{i0})/2$.

Часто вместо характерного времени между столкновениями τ используют соответствующую частоту столкновений $\nu = \tau^{-1}$.

В заключение приведем полезные формулы для практических расчетов [12]:

$$\lambda_{ei} = 4.5 \cdot 10^5 \frac{T_e^2}{nL_c} \approx 3 \cdot 10^4 \frac{T_e^2}{n}, \quad \sigma_{ei} = 2 \cdot 10^{-6} \frac{L_c}{T_e^2} \approx 3 \cdot 10^{-5} T_e^{-2},$$
$$\tau_{ei} = 0.67 \frac{T_e^{3/2}}{nL_c} \approx 4.5 \cdot 10^{-2} \frac{T_e^{3/2}}{n}, \quad \nu_{ei} = 1.5 \frac{nL_c}{T_e^{3/2}} \approx 22 \frac{n}{T_e^{3/2}}. \qquad (1.49)$$

При расчете числовых коэффициентов здесь принято значение L_c=15, типичное в термоядерных приложениях плазмы. Например, для изотермической дейтериевой плазмы в оптимальных для термоядерного реактора условиях, когда температура и концентрация плазмы равны T=10^8K, n=10^{14}см $^{-3}$, с помощью этих формул получаем следующие значения

$\lambda_{ei} \approx 3 \cdot 10^6$см, $\sigma_{ei} \approx 3 \cdot 10^{-22}$см^2,

для длины свободного пробега и сечения кулоновских столкновений, а характерные времена релаксационных процессов оказываются равными, с

$\tau_{ei} \approx 4.5 \cdot 10^{-4}$, $\tau_{ee} \approx 6.4 \cdot 10^{-4}$, $\tau_{ii} \approx 0.04$, $\tau_{\varepsilon} \approx 0.8$.

§ 10. Процессы переноса в плазме

Как и в обычном газе, при отступлении от термодинамического равновесия в плазме могут происходить процессы переноса массы, импульса и энергии, т.е. явления диффузии, вязкого трения и теплопроводности. При наличии неоднородности плотности, импульса или температуры, возникают потоки, пропорциональные градиенту соответствующей величины. Но в плазме, содержащей свободные заряды, может появиться и пространственная неоднородность распределения заряда, и, следовательно, перенос заряда - электрический ток.

Напомним, что согласно газокинетической теории коэффициент диффузии можно оценить как

$$D \sim (\Delta x)^2 / \tau, \qquad (1.50)$$

где Δx - среднее смещение частицы при хаотических блужданиях, а τ - время между столкновениями. Величина Δx порядка средней длины свободного пробега λ, и можно показать, что

$$D = 1/3 \lambda v_T, \qquad (1.51)$$

где $v_T = \sqrt{3\frac{T}{m}}$ - тепловая скорость частиц газа.

Известны выражения для коэффициентов вязкости η и теплопроводности κ газа:

$$\eta \sim mnD \qquad (1.52)$$

$$\kappa \sim nD \qquad (1.53)$$

Поясним, как возникают соотношения (1.51)-(1.53). В качестве отправной точки будем полагать, что сечение упругих столкновений молекул является приближенно постоянной величиной, определяемой размером молекулы $\sigma \sim \pi a^2$. В этом случае средняя длина свободного пробега зависит лишь от плотности газа и не зависит от температуры $\lambda \sim 1/(n\sigma) \sim 1/(\pi a^2 n)$. Например, при нормальных условиях (0°C, 1 атм.) плотность газа равна числу Лошмидта $n \cong 2.7 \cdot 10^{19}$см$^{-3}$, а λ имеет порядок 10^{-6}см, если $a = 5\,\mathring{A}$. Если газ является слабо неоднородным, то среднюю длину свободного пробега можно также считать приближенно постоянной величиной. Пусть газ слабо неоднороден по одной координате, например, по координате x изменяется плотность газа. Рассмотрим плоскость, перпендикулярную оси x. По смыслу средней длины свободного пробега – длины, в пределах которой частицы можно считать движущимися свободно, - эту плоскость пересекут за единицу времени слева на право вдоль оси x все частицы, имеющие положительную проекцию скорости $v_x > 0$ и отстоящие от нее на расстоянии $\lambda v_x / v$ $v_x > 0$. Аналогично, справа налево в обратном направлении плоскость пересекают все частицы с отрицательной компонентой скорости и отстоящие от нее на расстоянии $/\lambda v_x / v/$. Чтобы найти результирующий поток, надо просуммировать по всем этим частицам. Учтем, что при изотропном распределении молекул по скоростям в данном направлении в среднем, очевидно, движется 1/6 часть молекул при средней скорости хаотического движения v_T. Тогда результирующая плотность потока частиц, пересекающих выделенную плоскость в направлении оси x, приближенно равна

$$j_x \cong \frac{1}{6} n(x-\lambda) v_T - \frac{1}{6} n(x+\lambda) v_T \cong -\frac{1}{3} \lambda v_T \frac{\partial n}{\partial x}.$$

Мы видим, что плотность потока оказывается пропорциональной градиенту концентрации. Коэффициент пропорциональности здесь и есть коэффициент диффузии (1.51). Аналогично, рассматривая перенос тепла, и учитывая, что средняя энергия теплового движения, например, для одноатомного газа составляет $3/2T$, где T – температура газа, которая теперь считается переменной величиной, для плотности теплового потока находим

$$q_x = \frac{1}{6} n v_T \left[\frac{3}{2} T(x-\lambda) - \frac{3}{2} T(x+\lambda) \right] \cong -\frac{1}{2} n \lambda v_T \frac{\partial T}{\partial x} \equiv -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \kappa \approx \frac{1}{2} n \lambda v_T,$$

что согласуется с (1.53). Напомним, что температуру мы измеряем в энергетических единицах. Вязкость возникает при наличии градиента средней потоковой скорости. Так, если проекция V_y средней скорости меняется по x, то, из-за отсутствия баланса переноса импульса в противоположные стороны от выделенной нами плоскости, возникает поток y-й составляющей импульса вдоль оси x с плотностью [5]

$$\pi_{yx} = \eta \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad \eta \sim p\tau,$$

где p – давление, а τ - время между столкновениями. Поскольку для однокомпонентного газа $p=nT$, а $\tau=\lambda/v_T$, то получаем

$$\eta \sim p\tau \sim nT\frac{\lambda}{v_T} = mn\frac{T}{m}\frac{\lambda}{\sqrt{3T/m}} = \frac{1}{3}mn\lambda v_T,$$

что совпадает с (1.52).

Эти выражения для коэффициентов переноса можно применять и в расчетах коэффициентов переноса в плазме, имея, однако, в виду, что явления переноса в плазме определяются главным образом упругими столкновениями заряженных частиц. Поэтому зависимости коэффициентов переноса от температуры в плазме и в газе различны. В общем случае электронная и ионная компоненты плазмы могут иметь различную температуру, и тогда рассмотрение процессов переноса усложняется, а сами коэффициенты переноса будут зависеть от конкретного соотношения температур. В дальнейшем для простоты ограничим рассмотрение, главным образом, случаем изотермической двухкомпонентной плазмы.

Диффузия

Если в равенство (1.51) подставить значение λ из выражения (1.22) и принять $v_T = \sqrt{3\frac{T}{m}}$, то получим

$$D = \frac{3\sqrt{3}\,T^{5/2}}{4\pi e^4 L_c n\sqrt{m}}. \qquad (1.54)$$

Коэффициенты диффузии электронов и ионов, как мы видим, значительно различаются (в корень из отношения масс) и очень сильно зависят от температуры (в обычном газе $D \sim \sqrt{T}$).

Однако все особенности диффузии в плазме этим не ограничиваются. Так как коэффициенты диффузии электронов и ионов сильно различаются, то электроны, имеющие больший коэффициент диффузии, должны бы быстрее уходить из мест, где плотность плазмы больше. Уход электронов приведет к появлению в плазме электрического поля, тормозящего их уход и ускоряющего уход ионов. В результате диффузия плазмы в целом (масса плазмы фактически обусловлена ионами) будет происходить быстрее ионной диффузии, возникает так называемая *амбиполярная диффузия*.

Определим соответствующий коэффициент амбиполярной диффузии, учитывая, что в установившемся движении поток ионов будет определяться как обычной диффузией, так и подвижностью ионов в возникающем электрическом поле:

$$j_i = -D_i\frac{dn_i}{dx} - b_i\frac{d\varphi}{dx}, \qquad (1.55)$$

где b_i - подвижность ионов, φ - потенциал электрического поля. Аналогично поток электронов равен:

$$j_e = -D_e\frac{dn_e}{dx} + b_e\frac{d\varphi}{dx}, \qquad (1.56)$$

где b_e - подвижность электронов. Так как плазма в целом квазинейтральна, то, приняв $n_e=n_i=n$ и $\frac{dn_i}{dx} = \frac{dn_e}{dx} = \frac{dn}{dx}$, и исключив $\frac{d\varphi}{dx}$ из уравнений (1.55) и (1.56), обнаружим, что плотность потока частиц плазмы пропорциональна градиенту ее концентрации:

$$j = -\frac{D_i b_e + D_e b_i}{b_i + b_e}\frac{dn}{dx} = -D_a\frac{dn}{dx}. \qquad (1.57)$$

Коэффициент пропорциональности между плотностью потока частиц и градиентом концентрации и есть коэффициент амбиполярной диффузии:

$$D_a = \frac{D_i b_e + D_e b_i}{b_i + b_e}. \qquad (1.58)$$

Учитывая, что, согласно соотношению Эйнштейна, подвижность частиц и соответствующий коэффициент диффузии связаны между собой соотношениями

$$b_{e,i} = (|e|D/T)_{e,i}, \qquad (1.59)$$

а также, учитывая, что, согласно выражению (1.54), должно быть $D_e >> D_i$ и, как следствие, электроны значительно подвижнее ионов, получаем

$$D_a = D_i \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \right). \qquad (1.60)$$

Очевидно, имеют место неравенства $D_i < D_a << D_e$, как и должно быть, согласно логике наших рассуждений: амбиполярное электрическое поле усиливает перенос ионной компоненты плазмы и, тем самым, эффективно увеличивает коэффициент диффузии плазмы в целом по сравнению с коэффициентом диффузии ионов; для электронов - более подвижной компоненты плазмы - ситуация обратная.

Для изотермической плазмы, когда $T_e = T_i$, получаем

$$D_a = 2D_i.$$

Следует иметь в виду, что когда говорят о диффузии, то всегда подразумевается наличие некоторого «фона» неподвижных частиц среды, с которыми сталкиваются диффундирующие частицы. Сами «фоновые» частицы в движение не вовлекаются, оставаясь неподвижными. Сходная ситуация имеет место для слабо ионизованной плазмы, когда заряженная компонента столь малочисленна, что ее влиянием на нейтральную компоненту практически можно пренебречь. По этой же причине несущественны столкновения заряженных частиц друг с другом, так что основную роль играют столкновения заряженных частиц с нейтральными. Именно они определяют величины коэффициентов подвижности и, тем самым, коэффициенты диффузии заряженных частиц. Именно для слабо ионизованной газоразрядной плазмы и был впервые предложен Шоттки (1924) механизм амбиполярной диффузии, который обсуждался выше.

Теплопроводность

В газокинетической теории коэффициент теплопроводности плазмы определяется как

$$\kappa \sim nD \sim T^{5/2} / L_c \sqrt{m}. \qquad (1.61)$$

Он сильно зависит от температуры и слабо (через кулоновский логарифм) зависит от плотности частиц. При температурах, необходимых для получения управляемой термоядерной реакции $T \sim 10^8$ K, коэффициент теплопроводности, а, следовательно, и тепловые потери, обусловленные теплопроводностью, становятся недопустимо большими, как показывают простые оценки. По этой причине необходимо термоизолировать плазму, то есть исключить ее прямой контакт с охлаждаемыми стенками.

Поскольку передача энергии наиболее эффективна при столкновении одинаковых частиц (см. предыдущий параграф), то можно выделить отдельно электронную и ионную теплопроводность. При этом согласно соотношению (1.61), из-за существенного различия масс коэффициент электронной теплопроводности значительно превышает (примерно в корень из отношения масс) коэффициент ионной теплопроводности, так что теплопроводность полностью ионизованной плазмы определяется главным образом электронами. Детальные расчеты [13] с использованием кинетических уравнений приводят к следующим значениям этих коэффициентов переноса:

$$\kappa_i \cong 3.9 n_i T_i \tau_{ii}/m_i, \qquad \kappa_e \cong 3.16 n_e T_e \tau_{ei}/m_e. \tag{1.62}$$

Вязкость

В соответствии с газокинетическими представлениями коэффициент вязкости плазмы определяется как

$$\eta = mnD \sim \sqrt{m} T^{5/2}/L_c. \tag{1.63}$$

Коэффициент вязкости, так же как и коэффициент теплопроводности, слабо зависит от плотности и сильно зависит от температуры, причем коэффициент ионной вязкости значительно превышает коэффициент электронной вязкости. Согласно [13] для полностью ионизованной плазмы эти коэффициенты равны:

$$\eta_i \cong 0.96 n_i T_i \tau_{ii}, \qquad \eta_e \cong 0.73 n_e T_e \tau_{ei}, \tag{1.64}$$

для ионов и электронов соответственно.

Проводимость (электропроводность)

Так как плазма содержит свободные заряды, то при наложении внешнего электрического поля в плазме возможен перенос заряда. Это явление называют проводимостью (электропроводностью). По определению плотность тока j и напряженность электрического поля E связаны соотношением

$$j = \sigma E = -\sigma \frac{d\varphi}{dx}, \tag{1.65}$$

где σ - проводимость, а φ - потенциал электрического поля. Выражение (1.65) соответствует, очевидно, дифференциальной форме записи обычного закона Ома, вспомним - $U = IR$.

В простейшем случае при не слишком больших напряженностях электрического поля проводимость плазмы не зависит от напряженности электрического поля, и плотность тока прямо пропорциональна напряженности. Следует иметь в виду, что пропорциональность плотности электрического тока величине напряженности поля имеет место не всегда, часто эта зависимость сложнее, даже в однородном поле при $E = const$.

Для не слишком больших (при данной плотности и температуре плазмы) напряженностях поля $E = -d\varphi/dx$ можно считать, что весь заряд переносится электронами, так как приобретаемая электронами в поле направленная скорость превышает скорость ионов, $u_e >> u_i$. Рассмотрим упрощенную картину. Предположим, что за время между двумя кулоновскими столкновениями с ионами τ_{ei} электрон под действием электрического поля E набирает упорядоченную скорость u_e, т.е. импульс $m_e u_e = F\tau_{ei}$, который значительно меньше импульса, отвечающего его тепловому движению $\sim m_e v_{Te}$, и пусть при каждом столкновении электрон теряет полученный импульс направленного движения. Другими словами, сила, ускоряющая электрон $F = eE$, должна быть уравновешена силой трения mu_e/τ_{ei}, возникающей из-за столкновений с неподвижными ионами:

$$eE = mu_e/\tau_{ei} \quad . \tag{1.66}$$

Определив из равенства (1.66) u_e и подставив полученное значение в выражение для плотности тока:

$$j = neu_e, \tag{1.67}$$

получим

$$j = ne^2 \tau_{ei} E/m. \tag{1.68}$$

Сравнив этот результат с формулой (1.65), находим величину проводимости плазмы:

$$\sigma = ne^2 \tau_{ei}/m_e \, . \tag{1.69}$$

Этот классический результат известен как *формула Спитцера*.

Подставив значение τ_{ei} из формулы (1.47), получим следующую зависимость проводимости от параметров плазмы:

$$\sigma \propto \frac{T_e^{3/2}}{L_c} \sim T_e^{3/2}. \qquad (1.70)$$

Здесь учтено, что поскольку кулоновский логарифм, L_c, является медленной функцией температуры и плотности плазмы, то можно приближенно считать его постоянной величиной. Тогда, по существу, проводимость является функцией только электронной температуры. Аккуратный учет всех числовых коэффициентов приводит для водородной плазмы к следующему результату[13]:

$$\sigma = 1.96\sigma_1 T_e^{3/2}, \quad \sigma_1 \cong \frac{0.9 \cdot 10^{13}}{(L_c / 10)}, \; c^{-1}эВ^{-3/2}. \qquad (1.71)$$

По величине проводимости можно рассчитать удельное сопротивление плазмы $\rho=\sigma^{-1}$.

Поскольку плазма имеет активное сопротивление, то возможен ее нагрев джоулевым теплом. При этом джоулево тепло (с плотностью тепловыделения, как известно, равной j^2/σ) выделяется главным образом в электронной подсистеме плазмы. Электроны набирают энергию от электрического поля E (а оно может быть внешним, от отдельного источника) и лишь затем в процессе теплообмена передают эту энергию ионам. Такой нагрев называется омическим нагревом. На установках, использующих омический нагрев, удается достичь температуры ~1кэВ. Однако для дальнейшего ее повышения необходимо искать иные пути. Дело в том, что с ростом температуры, вследствие увеличения проводимости, эффективность омического нагрева уменьшается. Как известно, удельная мощность потерь энергии плазмой за счет излучения является, напротив, растущей функцией температуры (например, для тормозного механизма излучения она пропорциональна произведению $n^2\sqrt{T}$). В результате, как показано в [12], начиная с некоторой температуры, джоулево тепловыделение уже не может компенсировать потери плазмы на излучение.

Следует учесть и еще одно чрезвычайно важное обстоятельство. Формула для проводимости плазмы (1.69) верна в предположении, что набираемая электроном в электрическом поле на длине свободного пробега энергия значительно меньше средней тепловой энергии. Это означает, что область ее применимости ограничена слабыми электрическими полями. В поле с большей напряженностью электрон должен набирать большую энергию. Между тем, с увеличением энергии электрона сечение его кулоновского рассеяния на ионе, которое должно ограничивать набор энергии, быстро, обратно пропорционально квадрату энергии, убывает. Так что с увеличением энергии электрона быстро увеличивается время его движения между соударениями ($\sim v^3$), следовательно, электрон между соударениями может успеть набрать во внешнем поле импульс, превышающий импульс, отвечающий его тепловому движению. Критерий возникновения такой ситуации можно сформулировать следующим образом:

$$|e|E\tau > m_e v_{Te}. \qquad (1.72)$$

При выполнении этого условия часть электронов плазмы попадает, как говорят, в режим «падающего трения», когда действующая на них эффективная сила трения уменьшается с ростом их энергии. В результате потеря импульса при столкновениях с ионами не может ограничить набор импульса электронами во внешнем поле, так что часть электронов может перейти в режим непрерывного ускорения. Такие электроны получили название "просвистных" или "убегающих" электронов. Если предположить, что $\tau \approx \tau_{ei}$, то можно определить некоторое предельное значение поля $E_{кр}$, так называемое *поле Драйсера*, выше которого электроны начнут "уходить в просвист", т.е. будут непрерывно ускоряться [11]:

$$E > E_{кр} \approx 0.214 L_c e / r_{De}^2. \qquad (1.73)$$

Практически, заметная часть электронов плазмы начинает «уходить в просвист» уже при $E > 0.1E_{кр}$.

§ 11. Диэлектрическая проницаемость плазмы

Поместим плазму во внешнее переменное электрическое поле и попытаемся проследить изменение ее свойств, постепенно увеличивая его частоту. Статическое внешнее поле, как мы уже знаем, проникает в плазму на толщину масштаба дебаевского слоя. Это вытекает из уравнения экранировки (см. §3), которое, например, для одномерного случая записывается в виде:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{\varphi}{r_{De}^2}. \tag{1.74}$$

Здесь r_{De} – электронный дебаевский радиус. Удобно переписать это уравнение, используя представление Фурье $\varphi \sim \varphi_k \, exp(ikx - i\omega t)$. Результат для амплитуды Фурье-гармоники потенциала φ_k, как легко проверить, будет следующим:

$$k^2 (1 + \frac{1}{k^2 r_{De}^2}) \varphi_k = 0. \tag{1.75}$$

Сравним это уравнение с уравнением для индукции электрического поля

$$\frac{dD}{dx} = 0. \tag{1.76}$$

Для Фурье-гармоники его можно записать в следующем виде:

$$k^2 \varepsilon_k \varphi_k = 0, \tag{1.77}$$

где ε_k - диэлектрическая проницаемость плазмы, описывающая отклик плазмы на статическое воздействие. Как видим из сравнения (1.75) и (1.77), диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon_k = 1 + \frac{1}{k^2 r_{De}^2}. \tag{1.78}$$

Отклик плазмы на статическое воздействие оказывается вполне эквивалентен эффекту поляризации обычного диэлектрика, помещенного во внешнее поле, хотя, конечно, механизм поляризации иной: если дебаевский радиус мал по сравнению с характерной длиной волны, то диэлектрическая проницаемость оказывается очень большой и поле в плазму, фактически, не проникает.

При низких, но ненулевых, частотах ω качественно картина не изменится – заряды будут экранировать внешнее поле в слоях масштаба дебаевских. Плазма будет вести себя как проводник – внешнее поле в нее не будет проникать.

Но если частота поля будет велика, и будет превышать плазменную частоту, то картина качественно изменится: электроны из-за инерции не будут успевать подстраиваться под колебания поля, они будут осциллировать около некоторого среднего положения. В результате поле сможет проникнуть в плазму. По этой причине, в противоположность случаю низких частот, проникающее в плазму поле можно считать однородным. Чтобы найти диэлектрическую проницаемость плазмы в этом пределе высоких частот, будем считать переменное поле гармоническим:

$$\tilde{E} = E_0 e^{i\omega t}. \tag{1.79}$$

Смещение Δx электрона из положения равновесия под действием такого поля можно определить с помощью уравнения движения

$$m_e \ddot{x} = e\tilde{E} = eE_0 e^{i\omega t},$$

$$\Delta x = -\frac{e}{m\omega^2} \tilde{E}. \tag{1.80}$$

Подсчитаем теперь индукцию поля в плазме

$$\tilde{D} = \varepsilon_\omega \tilde{E} = \tilde{E} + 4\pi P, \tag{1.81}$$

где $P = ne\Delta x$ - дипольный момент единицы объема плазмы, обусловленный смещением электронов. Произведя подстановку, получим величину диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_\omega = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi ne^2}{m_e}, \tag{1.82}$$

описывающей отклик плазмы на высокочастотное и однородное электрическое поле.

Полученную формулу для диэлектрической проницаемости можно использовать и при рассмотрении воздействия на плазму электромагнитной волны, закон дисперсии которой определяет уравнение (подробнее см. Главу 3):

$$N^2 = \varepsilon, \tag{1.83}$$

где $N=kc/\omega$ – показатель преломления. Из формулы (1.82) очевидно, что высокочастотные волны с частотой $\omega > \omega_p$ могут проникать в плазму и распространяться в ней, так как для них будет $N^2>0$. Напротив, в области частот $\omega<\omega_p$ согласно (1.82) диэлектрическая проницаемость отрицательная, так что для электромагнитной волны с такой частотой коэффициент преломления оказывается чисто мнимым, и поперечная волна не может распространяться в плазме. Однако в этих условиях возможно распространение в плазме продольных - так называемых, ленгмюровских волн.

Как мы видим, в статическом пределе и в высокочастотном пределе диэлектрическая проницаемость плазмы описывается различными формулами. В действительности, обе они являются предельными случаями одной более общей формулы:

$$\varepsilon_{k,\omega} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - k^2 r_{De}^2}, \tag{1.84}$$

объединяющей, как легко видеть, оба предельных случая.

ГЛАВА 2

ПЛАЗМА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

§ 12. Одночастичное рассмотрение

Суть одночастичного рассмотрения, или приближения, в описании плазменных процессов сводится к изучению движения отдельных частиц плазмы в полях, которые считаются заданными изначально. Тем самым пренебрегается влиянием движения частиц плазмы на поля «управляющие» их движением, т.е. пренебрегается эффектами самосогласования движения частиц и вызываемого им изменения поля. В качестве первого шага такое приближение вполне оправдано и повсеместно используется, особенно, если есть возможность, по крайней мере, эффективно учесть влияние полей остальных частиц плазмы на движение какой-либо одной выделенной частицы. Подчеркнем, вместе с тем, что недоучет эффектов самосогласования содержит в себе множество неприятных «сюрпризов», и в истории развития исследований в области управляемого термоядерного синтеза таких примеров предостаточно. Например, в классических аксиально-симметричных адиабатических ловушках (см. §18), прекрасно удерживающих отдельные частицы плазмы очень низкой плотности, когда одночастичное приближение вполне оправдано, с повышением плотности плазмы, когда все большую роль начинают играть собственные поля плазмы, появляется неустойчивость и удержание плотной плазмы без дополнительных усилий просто невозможно.

В общем случае уравнение движения заряженной частицы в заданных внешних полях имеет вид:

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B} + \vec{F}\,, \qquad (2.1)$$

где первое слагаемое справа отвечает силе со стороны электрического поля, второе описывает силу со стороны магнитного поля (сила Лоренца), а последнее обозначает равнодействующую прочих внешних сил, которые могут действовать на частицу.

Уравнение (2.1) может быть проинтегрировано только в отдельных, наиболее простых случаях. Это понятно, если учесть, что действующие на частицу поля являются функциями координат и времени и, кроме того, что они сами связаны уравнениями Максвелла. Поэтому рассмотрим наиболее простые, часто встречающиеся случаи. Так, действием внешних, неэлектрических сил, обычно можно пренебречь, а электрическое поле часто отсутствует. Это соответствует движению заряженной частицы в постоянном во времени магнитном поле. Рассмотрим сначала движение в однородном поле, т.е. не меняющемся в пространстве.

§ 13. Движение в постоянном и однородном магнитном поле

В случае если других сил, кроме силы Лоренца нет, то уравнение (2.1) имеет вид

$$m\dot{\vec{v}} = \frac{q}{c}\vec{v}\times\vec{B} \ . \qquad (2.2)$$

Умножая скалярно правую и левую части уравнения (2.2) на скорость, учитывая, что сила Лоренца перпендикулярна к обоим векторам, входящим в векторное произведение (2.2), получим соотношение

$$m\vec{v}\dot{\vec{v}} \equiv \frac{d}{dt}\frac{mv^2}{2} = 0 \, .$$

Следовательно, кинетическая энергия частицы сохраняется:

$$\frac{mv^2}{2} = const. \qquad (2.3)$$

Это означает, что постоянное во времени магнитное поле не производит работы над частицей. Следовательно, модуль скорости частицы, заданный начальными условиями, сохраняет постоянное значение.

Разложив вектор скорости на компоненты: параллельную $v_{\|} = (\vec{v}\vec{B}) / B$ магнитному полю и перпендикулярную $\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - v_{\|}\vec{B} / B$ к магнитному полю, получим для продольного ускорения:

$$m\dot{v}_{\|} = \frac{e}{c}\frac{\vec{B}}{B}(\vec{v}\times\vec{B}) \equiv 0 \, ,$$

- постоянное и однородное магнитное поле не меняет продольную компоненту скорости, следовательно,

$$v_{\|} = (\vec{v}\vec{B}) / B = const \, . \qquad (2.4)$$

Для поперечного ускорения получаем

$$m\dot{\vec{v}}_{\perp} = \frac{q}{c}\vec{v}_{\perp}\times\vec{B} \, , \qquad (2.5)$$

и, как мы видим, поперечная компонента меняется только по направлению. Следовательно, частица равномерно движется вдоль силовой линии поля, вращаясь при этом вокруг силовой линии по окружности с постоянной угловой скоростью. Определим радиус этой окружности ρ и угловую скорость вращения ω.

Так как $\dot{\vec{v}}_{\perp}$ является центростремительным ускорением, то, вспомнив определение величины модуля центростремительного ускорения – отношение квадрата скорости вращения к радиусу окружности, или произведение квадрата угловой скорости на радиус окружности, – можем записать

$$m|\dot{v}_{\perp}| = \frac{mv_{\perp}^2}{\rho} = \frac{q}{c}vB = m\rho\omega^2 \, .$$

Откуда и получаем требуемые нам величины

$$\omega = \omega_{ларм} \equiv \frac{qB}{mc} \, ; \qquad (2.6)$$

$$\rho = \rho_{ларм} \equiv \frac{v_{\perp}}{\omega_{ларм}} = \frac{mcv_{\perp}}{qB} \qquad (2.7)$$

Радиус $\rho_{ларм}$ называют *ларморовским радиусом* частицы, а угловую скорость $\omega_{ларм}$ - *ларморовской или циклотронной частотой* вращения частицы (для этих величин употребительны и другие обозначения, например, с индексом “B”: ρ_B и ω_B, подчеркивающие в явном виде, что они относятся к случаю движения частицы в магнитном поле). Из соотношений (2.6) и (2.7) видно, что циклотронная частота зависит от массы и заряда частицы, напряженности магнитного поля, но не зависит от величины

скорости вращающейся в поле частицы, а ларморовский радиус зависит от составляющей скорости, перпендикулярной к магнитному полю, причем с увеличением ее он возрастает прямо пропорционально. Следует отметить, что вектор угловой скорости положительно заряженной частицы *антипараллелен*, а отрицательно заряженной частицы (например, электрона) - *параллелен* магнитному полю. Так как движение частицы по окружности можно уподобить круговому току $j = q\omega/2\pi$, то вращению частицы в магнитном поле можно сопоставить магнитный момент, равный магнитному моменту этого кругового тока:

$$\vec{\mu} = \frac{j}{c}\vec{S}\,. \qquad (2.8)$$

Здесь $\vec{S}$ - соответственно ориентированная площадь круга, охватываемая ларморовской окружностью, равная $S = \pi\rho^2$. Подставляя значения j и S в уравнение (2.8), получаем

$$\vec{\mu} = -\mu\frac{\vec{B}}{B}, \qquad \mu = \frac{mv_\perp^2/2}{B}\,. \qquad (2.9)$$

Магнитный момент вращающейся в магнитном поле частицы всегда направлен против магнитного поля, следовательно, положительно и отрицательно заряженные частицы вращаются в противоположных направлениях (рис. 2.1). В общем случае траектория движения частицы в постоянном и однородном магнитном поле представляет собой спираль.

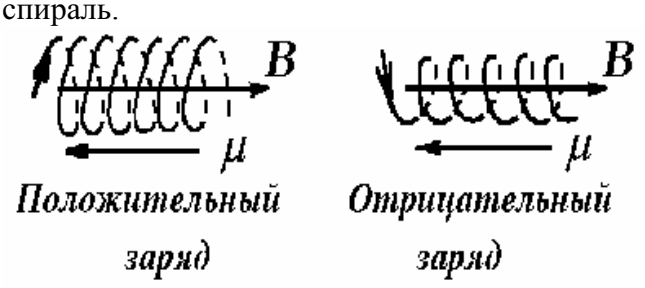


Рис.2.1. Движение заряженных частиц в постоянном магнитном поле (продольная скорость направлена вдоль магнитного поля в обоих случаях)

Конкретное направление вращения частицы в магнитном поле соответствует известному «правилу Ленца», согласно которому, любая механическая система стремится двигаться так, чтобы противодействовать причине, вызывающей ее движение. Вращающаяся по ларморовской окружности частица ведет себя как диамагнетик – она стремится ослабить охватываемый её ларморовской окружностью поток внешнего магнитного поля. Это выражает суть так называемого *принципа диамагнетизма свободных частиц.*

Возникает «законный» вопрос: если бы вращение частицы по ларморовской окружности вызывало изменение магнитного поля, в котором она вращается, то это должно было бы сказываться на траектории её движения, а изменение траектории в свою очередь привело бы к дополнительному искажению поля и т.д. В действительности это ложный путь. В электродинамике постулируется, что точечные заряженные частицы взаимодействуют друг с другом через посредство электромагнитного поля, создаваемого ими в окружающем пространстве, тем самым «самодействие» частиц исключается. Например, в рассмотренном случае движения выделенной частицы в заданном магнитном поле предполагается, что это поле создается другими, движущимися заданным образом заряженными частицами, здесь унесенными на бесконечность. По этой причине влиянием рассматриваемой частицы на движение источников магнитного поля можно пренебречь, – а только так, влияя на траектории этих источников, и затрачивая соответствующую энергию, частица могла бы «управлять» своей траекторией.

§ 14. Движение в сильном медленно меняющемся поле. Дрейфовое приближение

Если магнитное поле медленно меняется в пространстве и во времени, то, движущаяся в нем частица, прежде чем почувствует влияние изменения поля, совершит в нем множество ларморовских оборотов, навиваясь на силовую линию магнитного поля. Это движение, фактически в постоянном поле, мы уже изучили. Поэтому можно рассматривать движение не собственно частицы, а её мгновенного центра вращения, так называемого ведущего центра (в зарубежной литературе такой подход известен как *приближение ведущего центра* - guiding center approximation). Следует, однако, иметь в виду, что в случае, если магнитное поле меняется во времени, то нужно учитывать и слабые электрические поля. Согласно уравнениям Максвелла, в силу

$$rotE = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

переменное во времени магнитное поле вызывает появление вихревого электрического поля.

На медленное движение ведущего центра, определяемого как продольной скоростью частицы, так и влиянием слабого электрического поля и слабых неоднородностей магнитного поля, наложится быстрое вращение частицы вокруг силовых линий магнитного поля. Такое раздельное рассмотрение быстрого вращения частицы по ларморовской окружности и медленного «дрейфа» центра этой окружности будет справедливо, если изменение ларморовского радиуса на одном обороте будет существенно меньше самого ларморовского радиуса. Это условие, очевидно, будет выполнено, если характерное время изменения полей будет значительно больше времени ларморовского оборота, и если характерный пространственный масштаб изменения полей будет значительно превышать ларморовский радиус:

$$\Delta t_{поля}^{хар} >> T_{ларм}, \quad \Delta l_{поля}^{хар} >> \rho_{ларм}.$$

Количественно эти критерии можно сформулировать следующим образом:

$$\left|\frac{\partial B/\partial t}{\omega_{ларм} B}\right| << 1, \qquad \left|\frac{\partial E/\partial t}{\omega_{ларм} E}\right| << 1,$$

$$\left|\rho_{ларм}\frac{\nabla B}{B}\right| << 1, \qquad \left|\rho_{ларм}\frac{\nabla E}{E}\right| << 1. \qquad (2.10)$$

Очевидно, эти условия выполнены тем лучше, чем больше величина напряженности магнитного поля, так как ларморовская частота вращения частицы возрастает прямо пропорционально величине магнитного поля, а ларморовский радиус убывает обратно пропорционально величине магнитного поля. Вместе с тем, величина напряженности электрического поля E не должна быть слишком большой. На одном обороте частицы ее скорость должна меняться незначительно, настолько незначительно, чтобы выполнялось условие

$$\delta v \sim \frac{qE}{m} T_{ларм} \sim \frac{qE}{m\omega_{ларм}} \equiv c\frac{E}{B} << v.$$

Откуда и получаем требуемое ограничение на величину напряженности электрического поля

$$E << \frac{v}{c} B. \qquad (2.11)$$

При выполнении условий (2.10) и (2.11) истинная траектория частицы обычно представляет собой медленно изгибающуюся спираль с медленно меняющимся радиусом и шагом. Проекция траектории частицы на плоскость, перпендикулярную к силовым линиям магнитного поля, представляет собой трохоиду.

Движение ведущего центра обычно называют *дрейфовым движением,* а приближенное описание движения частицы как движение ведущего центра - *дрейфовым приближением*. Рассмотрим некоторые случаи, представляющие общий интерес, так как к ним можно свести многие виды движения заряженных частиц в неоднородных магнитных полях и в полях других внешних сил.

§ 15. Движение частицы в однородном магнитном поле под действием постоянной силы

Если на частицу, помимо силы Лоренца, действует постоянная сила $\vec{F}$, то уравнение движения частицы имеет вид:

$$m\dot{\vec{v}} = \frac{q}{c}\vec{v}\times\vec{B} + \vec{F}\,. \tag{2.12}$$

Разложив векторы $\vec{v}$ и $\vec{F}$ на перпендикулярную и параллельную магнитному полю компоненты, как это уже делалось в предыдущем параграфе, определим, что

$$m\dot{v}_{\parallel} = F_{\parallel} \qquad\qquad m\dot{\vec{v}}_{\perp} = \vec{F}_{\perp} + \frac{q}{c}\vec{v}_{\perp}\times\vec{B}\,. \tag{2.13}$$

Мы видим, что продольное и поперечное движения частицы оказываются независимыми, и их можно рассмотреть раздельно. При этом составляющая силы, параллельная магнитному полю, обуславливает ненулевое продольное ускорение частицы, которое изменяет продольную компоненту скорости. Под действием составляющей силы, перпендикулярной к магнитному полю, частица совершает сложное движение, являющееся суперпозицией вращения частицы и систематического сноса (*дрейфа*) с некоторой постоянной скоростью. Чтобы убедиться в этом, представим скорость поперечного движения в виде суммы

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v}_d + \vec{v}_r\,, \tag{2.14}$$

где $\vec{v}_d$ — постоянная скорость, а $\vec{v}_r$ — скорость вращения вокруг ведущего центра. Такое представление можно интерпретировать и как переход в движущуюся с постоянной, но заранее не известной (!), скоростью систему координат. Подстановка выражения (2.14) во вторую из формул (2.13) дает

$$m\dot{\vec{v}}_{\perp} \equiv m\dot{\vec{v}}_r = \vec{F}_{\perp} + \frac{q}{c}\vec{v}_d\times\vec{B} + \frac{q}{c}\vec{v}_r\times\vec{B}\,. \tag{2.15}$$

Так как первые два слагаемых справа – постоянные векторы, то они могут компенсировать друг друга. Это позволяет потребовать выполнение равенства

$$\vec{F}_{\perp} + \frac{q}{c}\vec{v}_d\times\vec{B} = 0\,.$$

Это требование и определяет величину скорости дрейфа частицы:

$$\vec{v}_d = \frac{c}{q}\frac{\vec{F}\times\vec{B}}{B^2}\,. \tag{2.16}$$

Оставшаяся часть уравнения (2.15)

$$m\dot{\vec{v}}_r = \frac{e}{c}\vec{v}_r\times\vec{B}\,, \tag{2.17}$$

описывает вращение вокруг ведущего центра, как это очевидно из сравнения с уравнением (2.5). Скорость частицы в таком движении, как мы уже обсуждали в предыдущем параграфе, может только поворачиваться по направлению, не меняясь по абсолютной величине. Величина скорости вращения может быть найдена по начальной скорости частицы, которая, конечно, должна быть изначально задана:

$$v_r = |\vec{v}_{\perp 0} - \vec{v}_d|\,, \tag{2.18}$$

где $\vec{v}_{\perp 0}$ - поперечная по отношению к магнитному полю компонента начальной скорости. Например, в частном случае $\vec{v}_{\perp 0} = 0$ получаем

$$v_r = v_d = \left| \frac{cF_\perp}{qB} \right|. \qquad (2.19)$$

Модуль скорости вращения определяет радиус окружности:

$$\rho = \frac{mcv_r}{qB}. \qquad (2.20)$$

по которой вращается частица в подвижной системе координат, движущейся со скоростью (2.16).

Не составляет большого труда найти и точный закон поперечного движения частицы:

$$\vec{r}_\perp = \vec{r}_{\perp 0} + \vec{v}_d t + \frac{(\vec{v}_{\perp 0} - \vec{v}_d) \times \vec{B}}{\omega B}(1 - \cos \omega t) + \frac{\vec{v}_{\perp 0} - \vec{v}_d}{\omega} \sin \omega t. \qquad (2.21)$$

Индексом ноль здесь помечены начальные значения соответствующих величин.

Составить представление о разнообразии возможных траекторий поперечного движения можно по нижеследующему рис. 2.2:

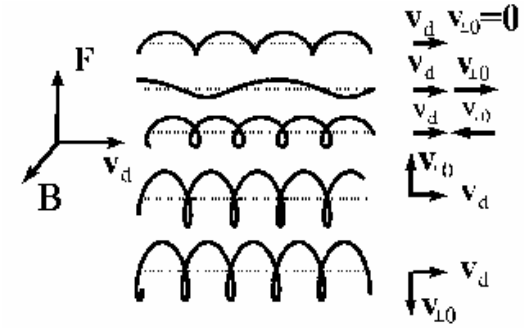


Рис.2.2. Типы возможных траекторий для некоторых частных случаев направления начальной скорости поперечного движения частицы в скрещенных полях (штриховая линия – положение центра ларморовской

Кроме того, следует отметить, что если поперечная компонента начальной скорости в точности совпадает со скоростью дрейфа:

$$\vec{v}_{\perp 0} = \vec{v}_d, \qquad (2.22)$$

то, как это следует из закона движения, частица движется равномерно поперек магнитного поля. Такая возможность представляет большой интерес в проблеме транспорта частиц поперек сильного магнитного поля.

Нами не высказывалось никаких предположений о природе силы $\vec{F}$, поэтому вывод о характере движения справедлив для любой постоянной силы $\vec{F}$: продольное (в общем случае) ускорение и систематический снос с постоянной скоростью в совокупности с равномерным вращением в поперечной по отношению к магнитному полю плоскости.

Из формулы (2.16) следует, что скорость дрейфа не зависит от массы частицы, но зависит от знака ее заряда, если сила от знака заряда не зависит. Полезно отметить также, что действие постоянной силы, перпендикулярной к магнитному полю, приводит (в среднем по осцилляциям!) не к увеличению скорости частицы, а к движению ее перпендикулярно к магнитному полю с постоянной скоростью. С похожим явлением мы встречаемся в механике при изучении прецессии оси гироскопа, когда приложенный к гироскопу момент вызывает вращение его оси в направлении, перпендикулярном как к моменту количества движения гироскопа, так и к моменту силы.

§ 16. Дрейф заряженных частиц вдоль плоскости скачка магнитного поля

В качестве еще одного точно разрешимого примера с дрейфовым движением рассмотрим задачу о движении заряженной частицы в магнитном поле со скачком, слева и справа от плоскости которого магнитное поле однородно и одинаково направлено, но имеет разную величину (см. рис. 2.3), пусть справа будет $B_2>B_1$. Вне скачка, где поле однородно, на расстоянии, превышающем ларморовский радиус, частицы описывают окружности, размер которых больше в области слабого поля (слева на рис.2.3).

На меньшем расстоянии при движении частицы её ларморовская окружность пересекает плоскость скачка, характер её движения резко меняется, так как каждый раз после пересечения этой плоскости скачком изменяется радиус окружности. Траектория приобретает сложный характер с наличием систематического «сноса» частицы вдоль плоскости скачка. Как видно из рисунка, дрейф перпендикулярен направлению магнитного поля и его градиента, причем, очевидно, имеет противоположный знак для разноименно заряженных частиц: для геометрии рис.2.3 он направлен вверх для положительного заряда, или был бы направлен вниз, если бы заряд был отрицательным.

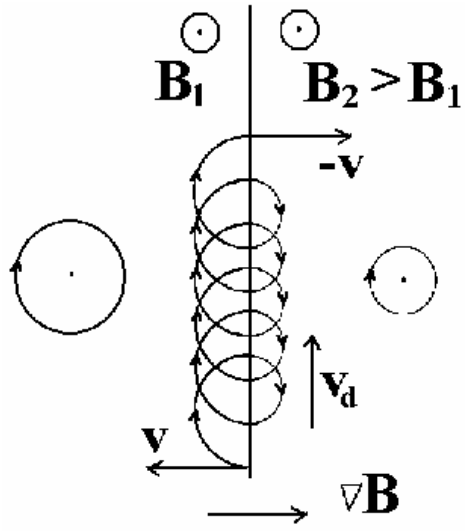


Рис.2.3. Схема возникновения дрейфа положительного заряда на границе со скачком величины магнитного поля

Нетрудно подсчитать скорость этого дрейфа. Пусть для простоты частица пересекает плоскость скачка по нормали. Тогда за время, равное сумме ларморовских полупериодов для области слева и справа

$$\Delta t = T_1 + T_2 = \frac{\pi}{\omega_1} + \frac{\pi}{\omega_2}, \qquad (2.23)$$

где

$$\omega_{1,2} = \frac{qB_{1,2}}{mc},$$

циклотронные частоты, вычисленные по значению поля слева и справа от плоскости скачка. Частица смещается вдоль этой плоскости на длину

$$\Delta x = 2(\rho_1 - \rho_2) = 2\left(\frac{v}{\omega_1} - \frac{v}{\omega_2}\right). \qquad (2.24)$$

Здесь v – скорость частицы, которая предполагается изначально направленной перпендикулярно плоскости скачка. Очевидно, скорость дрейфа можно определить как

$$v_d = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2v}{\pi}\frac{B_2 - B_1}{B_2 + B_1} \equiv \frac{v}{\pi}\frac{\Delta B}{< B >}, \qquad (2.25)$$

где $\Delta B=B_2-B_1$ – величина скачка магнитного поля, а $<B>=(B_2+B_1)/2$ – его среднее значение. Подчеркнем, что полученное решение – точное, причем в условиях, когда дрейфовое приближение заведомо неприменимо: размер

неоднородности, как предполагается, должен быть значительно меньше, чем ларморовские радиусы частиц!

Величина скорости дрейфа зависит, очевидно, и от угла, под которым частица пересекает область скачка. Мы не будем останавливаться на этом интересном вопросе – эту зависимость несложно получить, по сути дела, тем же самым путем, как и рассмотренный выше более простой случай перпендикулярного пересечения.

Дрейф возникает и том случае, когда слева и справа от некоторой плоскости магнитное поле по величине не меняется, но изменяет направление (см. рис.2.4). Магнитная конфигурация такого типа возникает в так называемых *токовых слоях*.

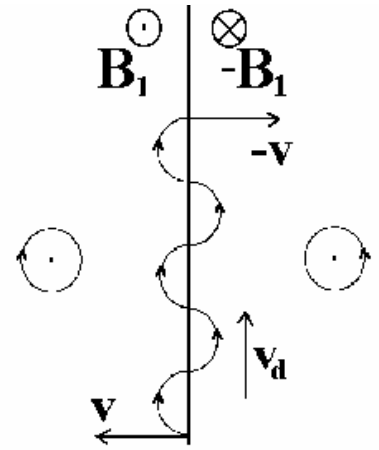


Рис.2.4. Дрейф положительного заряда при смене направления магнитного поля

В центре симметричного, например, плоского токового слоя магнитное поле равно нулю, а вне этой центральной плоскости, как это следует из закона Ампера $rot\,\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$, меняет знак. Если толщиной слоя пренебречь, получим скачок направления поля.

Вне слоя частицы вращаются по ларморовским окружностям, здесь – одинакового радиуса, но с противоположным направлением вращения, и дрейфа нет, если расстояние от плоскости слоя превышает ларморовский радиус. Дрейф возникает, когда ларморовская окружность пересекает эту плоскость. Траекторию частицы можно получить следующим образом. Пусть пересечение плоскости слоя частицей – по нормали, тогда ларморовскую окружность следует «разрезать» вдоль вертикального диаметра и затем, для положительного заряда, правую половину следует отразить зеркально вверх, как это изображено на рис.2.4. При этом за ларморовский период смещение вдоль слоя, очевидно, составляет два ларморовских диаметра, так что скорость дрейфа для этого случая:

$$v_d = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4\rho}{T} = \frac{4v/\omega}{2\pi/\omega} = \frac{2}{\pi}v\,. \qquad (2.26)$$

При пересечении «общего положения», при произвольном угле, скорость дрейфа, очевидно, меняется с изменением угла, но не зависит от величины магнитного поля! Подчеркнем, что и в этом случае дрейфовое приближение неприменимо.

§17. Важнейшие типы дрейфовых движений частиц в плазме

Рассмотренный в §15 пример движения частиц в магнитном поле под действием дополнительной постоянной силы является точным решением нерелятивистских уравнений движения. Весьма важным является то, что закономерности, присущие этому движению, сохраняются и в случае, когда поля, действующие на частицу, являются переменными. Однако характерные масштабы их изменения во времени и по пространству должны быть, как уже обсуждалось, достаточно медленными в сравнении с ларморовским периодом осцилляций частицы и ларморовским радиусом описываемой ею окружности соответственно. В этом случае для скорости дрейфа вновь справедлива формула (2.16). С тем лишь существенным отличием, что скорость дрейфа должна быть достаточна мала, значительно меньше средней скорости хаотического движения частиц плазмы. Последняя, как известно, определяется тепловой скоростью частиц. Таким образом, приходим к условию

$$v_d << v_T, \tag{2.27}$$

ограничивающему, причем зачастую весьма существенно, область применимости дрейфового приближения в описании движения частиц плазмы. Предполагая указанные ограничения выполненными, рассмотрим кратко некоторые примеры дрейфовых движений плазмы.

Дрейф в электрическом поле

Природа силы $\vec{F}$ может быть любой, например гравитационной или электрической. В частном случае электрической природы силы, когда $\vec{F} = e\vec{E}$, получим дрейф в электрическом поле

$$\vec{v}_E = c\frac{\vec{E}_\perp \times \vec{B}}{B^2}. \tag{2.28}$$

Дрейф в электрическом поле не зависит от знака заряда - плазма дрейфует как целое.

Теперь становится понятным смысл ограничения (2.11), наложенного на значение величины электрического поля. Необходимо, чтобы скорость дрейфа под действием электрического поля была значительно меньше тепловой скорости частицы, в противном случае нельзя говорить о медленном движении ведущего центра. Существенно, что характер движения частицы определяется именно соотношением величин полей E и B: при больших значениях поля E влиянием поля B можно пренебречь, и, очевидно, не может идти речи о дрейфе. При малых значениях электрического поля по сравнению с магнитным частица "замагничена" и медленно дрейфует в магнитном поле под действием электрического поля.

Дрейф в неоднородном магнитном поле ($\nabla B \neq 0$)

Дрейф в неоднородном магнитном поле связан с кривизной магнитных силовых линий и с силой, возникающей при движении частицы вдоль криволинейных силовых линий. Рассмотрим две составляющие этой силы и соответственно получим две составляющие дрейфа.

- **Центробежный дрейф.** При движении частицы, навивающейся на силовую линию с радиусом кривизны *R*, на нее действует центробежная сила инерции

$$\vec{F}_{цб} = -\frac{mv_\parallel^2}{R}\vec{n}, \tag{2.29}$$

и возникает дрейфовая скорость, равная по величине

$$v_{цб} = \frac{c}{e}\frac{mv_\parallel^2}{RB} = \frac{v_\parallel^2}{\omega}\frac{1}{R} = \frac{v_\parallel^2}{\omega}\frac{|\nabla B|}{B}, \tag{2.30}$$

и направленная по бинормали (за плоскость рисунка, см. рис. 2.5):

$$\vec{v}_{цб} = \frac{v_\parallel^2}{\omega}\frac{[\vec{B}\nabla B]}{B^2}, \qquad (2.31)$$

где $v_{цб}$ - скорость центробежного дрейфа, а $\omega-$ циклотронная частота.

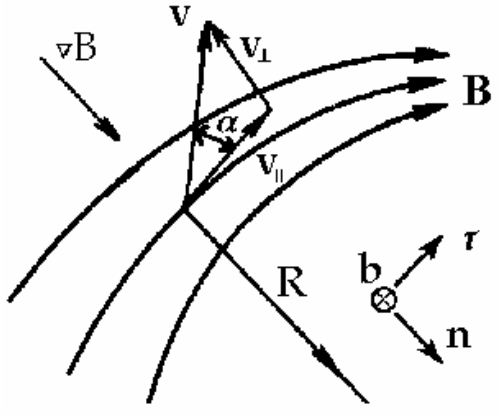


Рис. 2.5. Дрейф в неоднородном магнитном поле

- **Градиентный дрейф.** Скорость дрейфа в неоднородном поле зависит также от составляющей скорости частицы, перпендикулярной к магнитному полю. Уподобим вращающуюся вокруг силовой линии частицу магнитному диполю эквивалентного кругового тока. Тогда точное выражение скорости градиентного дрейфа можно получить из известного выражения для силы, действующей на магнитный диполь в неоднородном поле:

$$\vec{F} = -\mu\nabla B. \qquad (2.32)$$

Для вакуумного магнитного поля, как можно показать, справедливо соотношение:

$$\frac{\nabla_\perp B}{B} = \frac{\vec{n}}{R}, \qquad (2.33)$$

где R, напомним, - радиус кривизны силовой линии. Поэтому поперечная компонента силы, действующей на диполь, оказывается равной

$$\vec{F}_\perp = -\mu\frac{B}{R}\vec{n}, \qquad (2.34)$$

где $\vec{n}$ - единичный вектор нормали.

Подставляя это значение $\vec{F}_\perp$ в выражение (2.16), получаем

$$\vec{v}_{гр} = \frac{v_\perp^2}{2\omega}\frac{[\vec{B}\nabla B]}{B^2}. \qquad (2.35)$$

Реально механизм градиентного дрейфа состоит в том, что частица имеет различные радиусы вращения в разных точках траектории: часть времени она проводит в более сильном поле, часть в более слабом поле. Изменение радиуса и создает дрейф, как это обсуждали в предыдущем параграфе.

Скорость дрейфа в неоднородном магнитном поле представляет собой сумму скоростей центробежного и градиентного дрейфов (так называемый *дрейф по бинормали):*

$$\vec{v}_b = \frac{2v_\parallel^2 + v_\perp^2}{2\omega}\frac{[\vec{B}\nabla B]}{B^2} = \frac{1}{2\omega R}(v_\perp^2 + 2v_\parallel^2)\vec{b}, \qquad (2.36)$$

где $\vec{b}$ — орт бинормали (см.рис.2.5).

Скорость дрейфа зависит от заряда частицы (электроны и ионы дрейфуют в разные стороны), от её массы, от направления скорости частицы по отношению к магнитному полю и от величин напряженности и градиента напряженности магнитного поля. Важно отметить, что траектория ведущего центра проходит в области постоянного значения B, так как $\vec{v}_b \perp \vec{B}$ и $\vec{v}_b \perp \nabla B$.

В неоднородном магнитном поле ($\nabla B \neq 0$) электроны и ионы дрейфуют в разные стороны, следовательно, в плазме возникает ток с плотностью:

$$j = \sum_{e,i} ne\vec{v}_b, \qquad (2.37)$$

где предполагается суммирование по сортам заряженных частиц. Этот ток называют дрейфовым.

Далее увидим, что градиент давления ($\nabla p \neq 0$) также приводит к появлению дрейфовых токов.

Поляризационный дрейф

Когда частица испытывает ускорение, то в движущейся системе координат на нее действует инерционная сила $\vec{F} = -m\dot{\vec{v}}$, и возникает дрейф в соответствии с условием (2.17). В плазме часто появляются переменные электрические поля, определяемые местным разделением зарядов, так называемые поляризационные поля. В этом случае на частицу действует переменная сила, и возникает электрический дрейф с переменной скоростью

$$\vec{v}_n = c\frac{\dot{\vec{E}}_\perp \times \vec{B}}{B^2},$$

где $\vec{v}_n$ - дрейфовая поляризационная скорость; $\dot{\vec{E}}_\perp$ - составляющая электрического поля, перпендикулярная к магнитному полю. Именно она и вызывает дрейф. При переменном $\dot{\vec{E}}_\perp$ меняется и $\vec{v}_n$, т.е. появляется ускорение, а, следовательно, и сила инерции $\vec{F}_u = -m\dot{\vec{v}}_n$. Под действием этой силы возникает поляризационный дрейф

$$\vec{v}_n = \frac{c^2}{e}\frac{m\dot{\vec{E}}_\perp}{B^2}. \qquad (2.38)$$

Величина $\vec{v}_n$ зависит от массы (большая величина у ионов), заряда частицы, напряженности магнитного поля и скорости изменения электрического поля. Поляризационный дрейф направлен вдоль вектора $\dot{\vec{E}}_\perp$ - перпендикулярной составляющей производной по времени от напряженности электрического поля - параллельно или антипараллельно ему.

Этот дрейф создает поляризационный ток - аналог тока смещения:

$$\vec{j}_n = ne\vec{v}_n = \rho_m \frac{c^2}{B^2}\dot{\vec{E}}_\perp, \qquad (2.39)$$

где ρ_m - массовая плотность плазмы.

Можно определить и составляющую $\varepsilon_\perp$ диэлектрической постоянной плазмы, перпендикулярную к магнитному полю. Добавляя к поляризационному току $\vec{j}_n$ поперечную компоненту тока смещения $\vec{j}_{см} = \frac{1}{4\pi}\dot{\vec{E}}_\perp$ (здесь точкой отмечена частная производная от поля по времени), получим

$$\vec{j} = \vec{j}_n + \vec{j}_{см} = \frac{1}{4\pi}(1 + 4\pi\rho_m \frac{c^2}{B^2})\dot{\vec{E}}_\perp. \qquad (2.40)$$

Учитывая далее, что плотность тока связана с производной поля по времени хорошо известным соотношением

$$\vec{j} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\dot{\vec{E}}, \qquad (2.41)$$

находим

$$\varepsilon_\perp = 1 + 4\pi\rho_m \frac{c^2}{B^2}. \qquad (2.42)$$

Тороидальный дрейф и вращательное преобразование

Рассмотрим поведение плазмы в магнитном поле тороидального соленоида. Магнитное поле тороидального соленоида аналогично магнитному полю прямого проводника и убывает с увеличением большого радиуса по закону *1/R* (рис.2.6). Это становится очевидным, если учесть, что величина тока на единицу длины окружности

$2\pi(R-r)$ больше, чем соответствующая величина на окружности $2\pi(R+r)$, где r - радиус поперечного сечения тора (см. рис.2.6). Неоднородность магнитного поля вызывает возникновение дрейфа, приводящего к смещению ионов на одну (на рис.2.6 - вниз), а электронов на другую (на рис.2.6 - вверх) сторону соленоида, а, значит, к появлению дрейфового тока. Так как дрейфовый ток замкнуться не может, то возникает разделение зарядов и соответствующее ему поляризационное электрическое поле E.

Но теперь появление этого поля приводит к возникновению дрейфа плазмы в целом в скрещенных взаимно перпендикулярных $E \perp B$ полях, выбрасывающего плазму на наружную стенку тороидального соленоида.

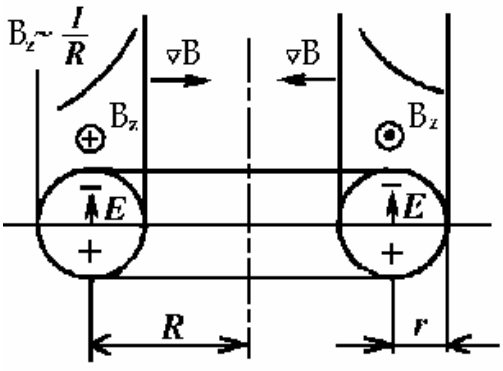


Рис. 2.6. Тороидальный дрейф.

Таким образом, в свободном от внутренних токов тороидальном соленоиде плазма не будет устойчиво удерживаться. Картина принципиально изменится, если внутри, в центре сечения соленоида, поместить проводник с током, или пропустить ток непосредственно по плазме. Этот ток создаст собственное магнитное поле B_φ, перпендикулярное к полю соленоида B_z, так что суммарная силовая линия магнитного поля пойдет по винтовой траектории, охватывающей ось соленоида. Образование винтовых линий магнитного поля получило название *вращательного (или ротационного) преобразования*. Эти линии будут замыкаться сами на себя, если *коэффициент запаса устойчивости*, представляющий собой отношение шага винтовой силовой линии к длине оси тора

$$q = \frac{B_z}{B_\varphi}\frac{a}{R}, \qquad (2.43)$$

будет равен отношению двух целых чисел, т.е. равен рациональному числу - отношению числа оборотов силовой линии вокруг тора и числа оборотов вокруг оси тора. При значениях этой величины, не равных рациональному числу, силовые линий, никогда не замыкаясь, за бесконечное число оборотов образуют замкнутые тороидальные магнитные поверхности, вложенные друг в друга и образованные каждая единственной силовой линией. Винтовые линии магнитного поля сделают невозможной поляризацию плазмы: перемещаясь вдоль них, электроны и ионы создадут дрейфовые токи, которые будут взаимно нейтрализованы, не будет разделения зарядов, не появится и электрическое поле. Следовательно, не возникнет и тороидальный дрейф, выбрасывающий плазму на наружную стенку, имеющий место в бестоковом тороидальном соленоиде.

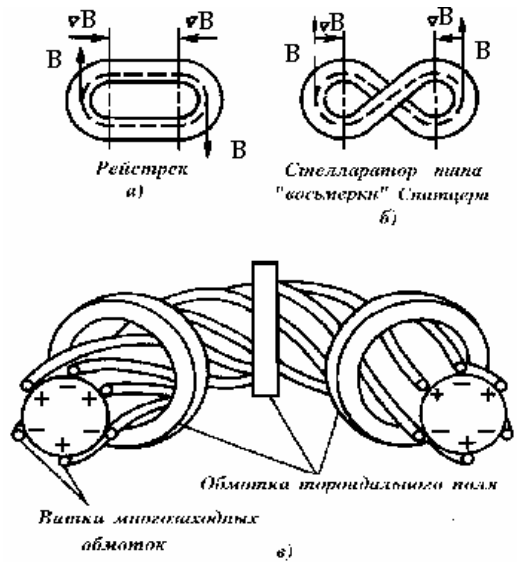


Рис.2.7. Схема вращательного преобразования

Существенно, что в каждой точке свое соотношение величин магнитных полей тока и соленоида (ведь магнитное поле тока будет убывать по закону $1/r$ (r малое!) во все стороны от тока). Поэтому силовые линии расположенных рядом магнитных поверхностей скрещиваются, причем угол наклона непрерывно меняется с изменением R. Образуется сложная пространственная сетка магнитных силовых линий, получившая название *шир*. Такая сетка существенно затрудняет перемещение плазмы поперек магнитного поля.

В системах типа *токамак* (сокращенное от «*токовая камера с магнитными катушками*») внутри тороидального соленоида по плазме течет ток, имеется вращательное преобразование и шир. Конечно, ток распределен по сечению плазменного шнура (а течет не только в центре), значит, реальная картина сложнее рассмотренной выше, но возможность компенсации эффекта тороидального дрейфа остается в силе.

Американский физик Спитцер доказал, что вращательное преобразование можно получить и без тока в плазме. Такого типа системы для удержания плазмы получили название *стеллараторы*. Возможность реализации вращательного преобразования без тока в плазме можно пояснить с помощью схемы, изображенной на рис. 2.7.

Разрежем (мысленно) тороидальный соленоид пополам и соединим его концы:
а) прямолинейными участками – получим так называемый *рейстрек* (в прямых участках тоже создается магнитное поле). Силовые линии магнитного поля замыкаются, дрейф заряженных частиц в правой и левой тороидальных частях имеет одинаковое направление. Поэтому по-прежнему остается возможность возникновения поляризационного электрического поля E и дрейфа в перпендикулярных $E \perp B$ полях, направленного к наружной стенке камеры;
б) накрест - получим стелларатор типа восьмерки (в прямых участках тоже создается магнитное поле). В этом случае магнитные силовые линии имеют возможность «прокручиваться» вокруг оси системы и, вообще говоря, не будут замыкаться: можно показать, что на каждом “обходе” силовая линия поворачивается на учетверенный пространственный угол между тороидальными участками, тем самым становится винтовой линией и реализуется эффект вращательного преобразования с компенсацией тороидального дрейфа.

Это же можно объяснить несколько проще: в рейстреке при переходе от левой половины тора к правой (рис.2.7,а) меняется направление у векторов B и ∇B, так что направление скорости дрейфа $\vec{v}_d \sim \vec{B} \times \nabla B$ сохраняется, возможна поляризация плазмы, возникновение электрического поля и т.д. В стеллараторе типа «восьмерки» Спитцера при переходе от левой половины тора к правой (рис.2.7,б), при прежней ориентации векторов ∇B, за счет эффекта вращательного преобразования восстанавливается направление вектора B, так что направление скорости дрейфа $\vec{v}_d$ меняется на противоположное. Поляризация невозможна – как бы создаются два одинаковых электрических поля, направленных антипараллельно, т.е. компенсирующих друг друга.

Расчеты показали (и опыт подтвердил), что вместо пространственного перекрещивания концов, то есть вместо создания магнитной системы с пространственной осью, что является достаточно сложной технически задачей, можно на тороидальные части рейстрека накладывать дополнительные специальные многозаходные (обычно двух- или трехзаходные) обмотки. При этом токи в соседних витках выбираются текущими в противоположных направлениях (рис.2.7,в). В такой системе также возникает вращательное преобразование силовых линий магнитного поля и становится возможным образование вложенных друг в друга замкнутых магнитных поверхностей.

Правда, эти поверхности находятся внутри некоторой граничной, называемой сепаратрисой, заполняют не все сечение камеры и имеют довольно сложную форму. Но существо дела сохраняется: любой стелларатор является идеальной магнитной ловушкой для отдельных частиц и способен хорошо удерживать плазму без пропускания дополнительного тока в ней. Так как в таких системах имеются магнитные силовые линии, не выходящие за пределы системы (замкнутые или уходящие в бесконечность на замкнутой поверхности), то подобные системы называют закрытыми (иногда замкнутыми).

§ 18. Адиабатические инварианты

Как известно из механики, любая механическая система, совершающая финитное движение, например, математический маятник или груз, подвешенный на пружинке, имеет траекторию, занимающую в фазовом пространстве ограниченную область (в простейшем случае одномерного движения это плоскость обобщенного импульса и обобщенной координаты, рис.2.8). Если энергия этой системы сохраняется, то траектория, отвечающая заданной энергии W, является замкнутой. Охватываемая этой траекторией площадь, очевидно, является точным интегралом движения. Существенно, что приближенное сохранение этой площади имеет место и том случае, когда энергия системы меняется со временем под действием какого-либо возмущения (например, слабого трения, или изменения длины маятника и тому подобное), но это изменение медленное по сравнению с периодом невозмущенного движения. Теперь эта площадь уже не является точным интегралом движения, и сохранение имеет место лишь в среднем по периоду невозмущенного движения. В этом случае говорят о сохранении *адиабатического инварианта*. По размерности эта площадь пропорциональна произведению средней за период энергии частицы на величину этого периода:

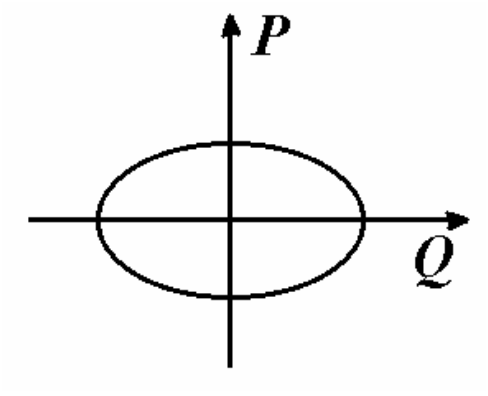


Рис.2.8. «Фазовый портрет» одномерного осциллятора

$$J \sim < W > T . \qquad (2.44)$$

Поэтому, если при изменении какого-либо параметра системы период движения уменьшается (например, для математического маятника период, как известно, определяется соотношением $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, и период уменьшается с уменьшением длины маятника), то её энергия в среднем возрастает.

Принцип адиабатической инвариантности находит важные приложения к проблеме удержания плазмы − по необходимости траектории частиц должны быть финитными. Рассмотрим кратко некоторые приложения этого принципа для случая движения частиц в магнитном поле**.**

Инвариантность магнитного момента μ частицы во времени

Если заряженная частица движется в однородном, но меняющемся во времени магнитном поле, то ее ларморовский радиус и перпендикулярная скорость будут меняться. Это происходит потому, что индуцированное меняющимся магнитным полем электрическое будет ускорять (или замедлять) частицу.

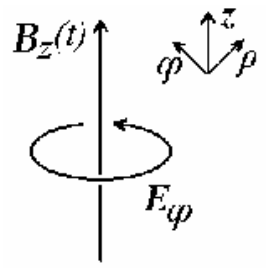


Рис.2.9. Геометрия полей (магнитное поле - убывает)

Выберем цилиндрическую систему координат так, чтобы вектор напряженности магнитного поля был параллелен оси z этой системы (см. рис.2.9), тогда $\vec{B}(t) = B(t)\vec{e}_z$, где $\vec{e}_z$ - соответствующий единичный вектор. Из закона индукции

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}B_z = rot_z\vec{E} \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho E_\varphi , \qquad (2.45)$$

находим

$$E_\varphi = -\frac{1}{2}\frac{\rho}{c}\dot{B}(t) . \qquad (2.46)$$

Подставляя теперь эти поля в оставшиеся уравнения Максвелла, обнаруживаем, что

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}E_\varphi = rot_\varphi B_z \equiv 0,$$
$$div\,\vec{B} \equiv 0, \qquad (2.47)$$
$$div\,\vec{E} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}E_\varphi \equiv 0.$$

Поэтому уравнения Максвелла удовлетворяются тождественно при выборе линейной зависимости напряженности магнитного поля от времени, так что:

$$B(t) = B_0 + \dot{B}_0 t\,, \qquad E_\varphi = -\frac{1}{2}\frac{\rho}{c}\dot{B}_0 \qquad (2.48)$$

где $\dot{B}_0$ - постоянная величина (скорость изменения поля), которая может быть как положительной (поле растет), так и отрицательной (поле убывает); B_0 - начальное значение поля.

Полученное решение уравнений Максвелла – точное, но несколько искусственное: трудно представить себе ситуацию, когда магнитное поле нарастает сразу во всем пространстве. На практике часто используют приближенное решение, считая, что порождающие магнитное поле токи меняются настолько медленно, что токами смещения (и, тем самым, волновым процессом установления поля) можно пренебречь. Тогда формулы

$$\vec{B}(t) = B(t)\vec{e}_z\,, \qquad \vec{E} = -\frac{1}{2}\frac{\rho}{c}\dot{B}(t)\vec{e}_\varphi \qquad (2.49)$$

приближенно описывают распределение полей при произвольной зависимости B(t), медленной на масштабах времени $\Delta t \sim L/c$, где L - размер области, занимаемой полем.

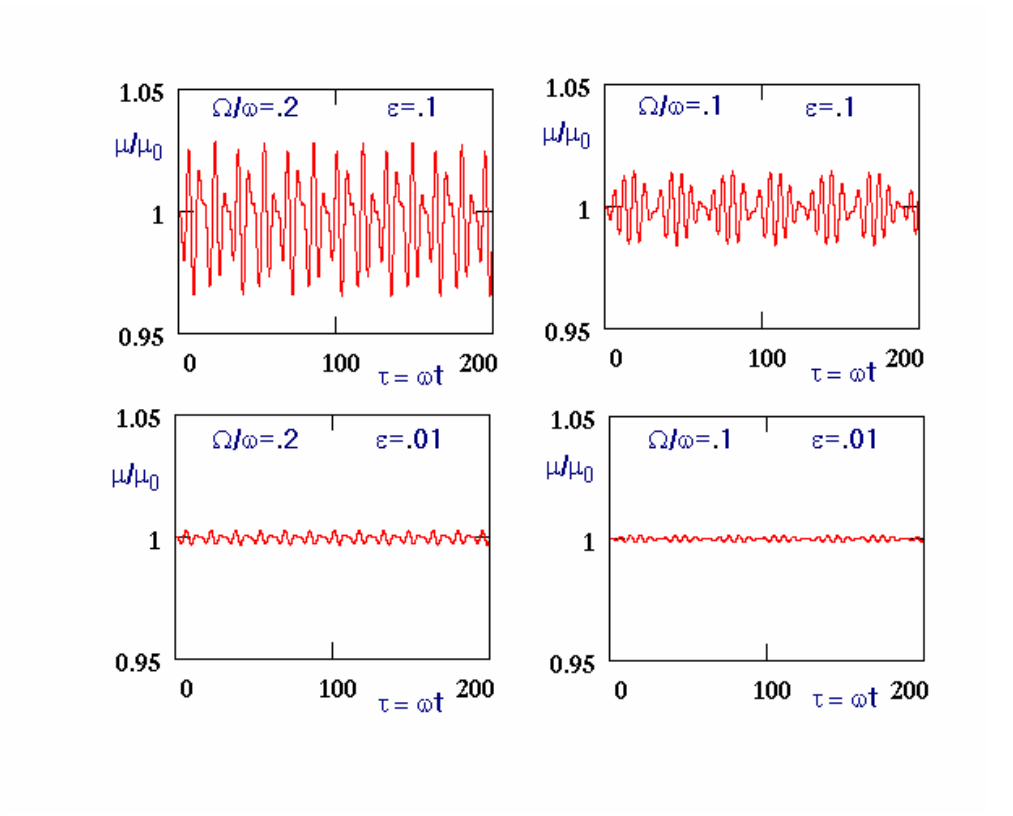


Рис.2.10. Иллюстрация сохранения поперечного адиабатического инварианта в слабо переменном, медленно осциллирующем поле $B=B_0(1+\varepsilon\cos\Omega t)$; ω - ларморовская частота, μ_0 - начальное значение

Для иллюстрации сохранения μ – магнитного момента или *поперечного адиабатического инварианта* – при движении частицы в переменном магнитном поле ограничимся грубым приближением, считая, что радиальная скорость тождественно равна нулю и радиус орбиты – постоянный. В этом приближении уравнения движения сводятся к виду

$$m\dot{v}_\varphi = eE_\varphi, \quad mv_\varphi = -\frac{e}{c}\rho B \tag{2.50}$$

и, как не трудно проверить, дают соотношение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v_\varphi^2}{2}\right) = \frac{v_\varphi^2}{2B}\frac{dB}{dt}. \tag{2.51}$$

Это означает, что отношение

$$\frac{v_\varphi^2}{B} = const \tag{2.52}$$

сохраняется. Переобозначив $v_\varphi \to v_\perp$, получим окончательно

$$\frac{mv_\perp^2}{2B} = \mu = const\,. \tag{2.53}$$

Грубое приближение, использованное выше, вовсе не обязательно. Детальные расчеты (см., например [11]) показывают сохранение μ в общем случае в условиях применимости адиабатического приближения. Для иллюстрации «качества» сохранения μ на рис.2.10 приведены результаты точных численных расчетов этого параметра для частного вида осциллирующего поля.

Инвариантность μ частицы в постоянном во времени и неоднородном в пространстве магнитном поле

Когда поле B постоянное во времени, но медленно меняется в пространстве, то при переходе частицы из слабого поля в более сильное на нее действует сила (рис.2.11):

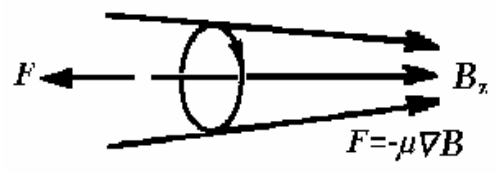


Рис.2.11. Выталкивание заряженной частицы неоднородным магнитным полем.

$$F_z = -\mu\frac{\partial B}{\partial z} = m\frac{dv_\parallel}{dt}; \tag{2.54}$$

Здесь

$$v_\parallel = \frac{dz}{dt}. \tag{2.55}$$

После преобразования вдоль траектории получим

$$-\mu\frac{dB}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv_\parallel^2}{2}\right). \tag{2.56}$$

Так как полная энергия при движении в магнитном поле сохраняется

$$\frac{mv_\parallel^2}{2} + \frac{mv_\perp^2}{2} = const\,,$$

то получаем

$$-\mu\frac{dB}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_\perp^2}{2}\right) - \frac{d}{dt}(\mu B); \tag{2.57}$$

что возможно, только если

$$\mu = const. \tag{2.58}$$

Неточность, допущенная при выводе, в данном случае связана с тем, что изменения B в перпендикулярном направлении не учтены. Это допустимо лишь при медленном изменении. В, т.е. если выполняется условие (2.10). Обобщая уравнения (2.53) и (2.58), можно сказать, что магнитный момент представляет собой адиабатический инвариант движения заряженной частицы в медленно изменяющемся магнитном поле.

Отсюда можно сделать несколько интересных выводов. Из вполне очевидных алгебраических выкладок

$$\frac{mv_\perp^2}{2B} = \frac{m^2v_\perp^2c^2}{e^2B^2}\frac{e^2}{2mc^2}B = const\cdot\rho^2 B = const\cdot\Phi = const \tag{2.59}$$

следует, что магнитный поток, пронизывающий ларморовский кружок, адиабатически постоянен. Это обстоятельство приводит к выводу, что при изменении магнитного поля ларморовский радиус изменяется по закону:

$$\rho \sim \frac{1}{\sqrt{B}}, \tag{2.60}$$

то есть значительно медленнее, чем в случае постоянной поперечной скорости.

Аналогично получим:

$$m v_{\perp} \rho = const, \tag{2.61}$$

то есть момент количества движения частицы также остается адиабатически постоянным.

Инвариантность величины $v_{\parallel} l$

Рассмотрим движение частицы в ящике с упругими стенками (рис.2.12). Пусть скорость частицы, направленная вдоль дна ящика, равна $v_{\parallel}$, а одна из стенок ящика движется со скоростью $U << v_{\parallel}$. Для заряженной частицы «стенкой ящика» может быть область усиленного магнитного поля, от которой частица отражается.

При упругом отражении от движущейся стенки частица изменит скорость на величину $\delta v = 2U$ (считаем массу стенки бесконечной). Тогда изменение скорости частицы за одно полное колебание

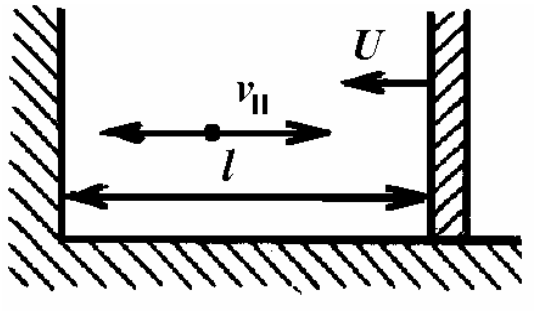


Рис.2.12. Частица в ящике с движущейся стенкой.

$$\delta t = \frac{2l}{v_{\parallel}}, \tag{2.62}$$

будет равно

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{\delta v}{\delta t} = \frac{2U}{2l} v_{\parallel}. \tag{2.63}$$

Так как $U = -\frac{dl}{dt}$, то получаем

$$\frac{dv_{\parallel}}{v_{\parallel}} + \frac{dl}{l} = 0 \tag{2.64}$$

или

$$v_{\parallel} l = const. \tag{2.65}$$

Сближающиеся стенки увеличивают скорость частицы.

§ 19. Применение адиабатического и дрейфового приближений

Зеркальные ловушки (пробкотроны)

На использовании адиабатической инвариантности магнитного момента заряженной частицы в магнитном поле основаны открытые магнитные ловушки.

Рассмотрим движение заряженной частицы в постоянном во времени аксиально-симметричном магнитном поле соленоида, усиленном на обоих концах. Форма силовых линий магнитного поля для этого случая изображена на рис.2.13,а.

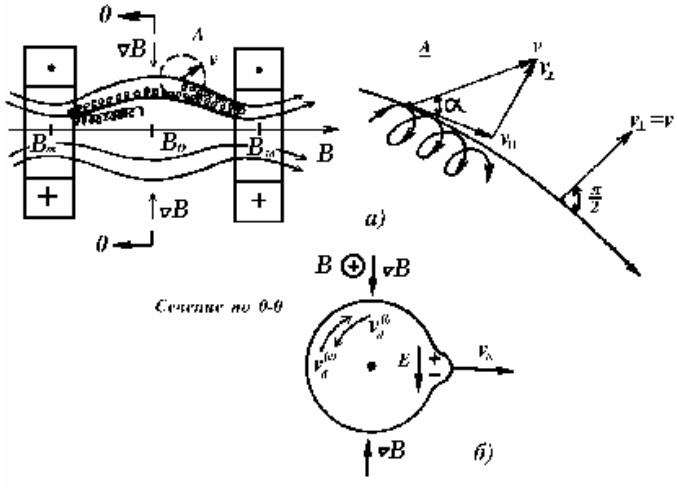


Рис.2.13. Заряженная частица в магнитном поле пробкотрона.

Пусть в некоторой точке А родилась заряженная частица, движущаяся со скоростью $\vec{v}$, направленной под углом α к силовой линии магнитного поля $(0 \le \alpha \le \pi)$. Используя определение поперечного адиабатического инварианта (2.53), и учитывая, что $v_\perp = v \sin\alpha$, можно получить соотношение:

$$\frac{\sin^2\alpha}{B} = \frac{\mu}{mv^2/2}, \qquad (2.66)$$

где B - величина индукции магнитного поля в точке «рождения» частицы.

Заметим, что поскольку правая часть (2.66) представляет собой отношение двух сохраняющихся величин – адиабатического инварианта μ и полной кинетической энергии $mv^2/2$, то это соотношение справедливо не только в начальной точке, но и в любой другой точке вдоль траектории частицы, если под величинами α и B понимать текущие значения угла наклона и магнитной индукции. Иными словами, согласно (2.66) при смещении частицы вдоль траектории изменение одной из величин $\sin^2\alpha$ или B вызывает пропорциональное изменение другой из них. Но тогда мы видим, что при движении в область с увеличивающимся магнитным полем по мере роста величины индукции магнитного поля угол наклона скорости частицы по отношению к силовой линии, а, следовательно, и поперечная компонента скорости частицы $v_\perp$ должны увеличиваться. Если синус этого угла достигнет предельного значения, равного единице, то будет $v_\perp = v$, а продольная скорость частицы обратится в ноль, $v_\parallel = 0$. Частица перестанет смещаться вдоль силовой линии - она отразится и станет двигаться назад по направлению к центру системы (рис.2.13,а), затем, пройдя область с минимальным магнитным полем, достигнет противоположного конца, где поле вновь увеличивается, вновь отразится теперь здесь, и так далее. Другими словами, частица окажется “запертой” между *магнитными пробками* (в англоязычной литературе - *mirrors*, а пробкотрон называют *mirror machine*). Очевидно, что в поле данной системы могут удерживаться не все частицы, а только те, скорость которых в точке рождения имеет достаточно большой угол наклона к силовой линии, с тем, чтобы в сечении с наибольшим значением B (или раньше) частица отразилась. Отношение максимального поля B_m к минимальному B_0 вдоль оси системы (см. рис.2.13,а),

$$R = B_m / B_0 > 1,$$

называют *пробочным отношением*, и для удержания частиц, родившихся в центре, необходимо, чтобы было выполнено неравенство

$$\sin\alpha \ge 1/\sqrt{R}. \qquad (2.67)$$

Для всех остальных частиц величина $sin\,\alpha$ должна быть еще больше, чтобы они оставались в ловушке. А те частицы, для которых выполнено обратное неравенство

$$sin\,\alpha < 1/\sqrt{R}\,, \qquad (2.68)$$

уйдут из ловушки вдоль силовых линий магнитного поля.

Эти неравенства несложно обосновать следующим образом. Обозначим посредством α_m угол наклона скорости по отношению к силовой линии магнитного поля в области, где индукция достигает максимального значения $B=B_m$. Эти величины должны быть связаны соотношением, которое можно получить, просто заменив в (2.66) α на α_m и B на B_m:

$$\frac{sin^2\,\alpha_m}{B_m} = \frac{2\mu}{mv^2}\,.$$

Пусть, далее, B_0 величина индукции магнитного поля в центре системы, где первоначально расположена частица. Тогда соотношение (2.66) в этом положении должно быть записано в виде:

$$\frac{sin^2\,\alpha}{B_0} = \frac{2\mu}{mv^2}\,.$$

Правые части в этих формулах совпадают, следовательно, получаем

$$\frac{sin^2\,\alpha_m}{B_m} = \frac{sin^2\,\alpha}{B_0}\,,$$

или

$$sin^2\,\alpha_m = \frac{B_m}{B_0}\,sin^2\,\alpha \equiv R\,sin^2\,\alpha\,.$$

Поскольку левая часть этого равенства не превосходит единицу, то во всех «разрешенных» для движения частицы областях должно быть $R\,sin^2\,\alpha \le 1$, т. е. частицы наверняка покинут ловушку, если выполнено условие (2.68). В противном случае, когда выполнено условие (2.67), область с максимальным полем для частицы оказывается недостижимой, и она не может покинуть ловушку.

Конус направлений, в пределах которого частицы покидают ловушку, носит название *опасного конуса потерь***.** Системы, в которых все силовые линии выходят за пределы рабочей камеры, называют открытыми, к ним относятся все пробкотроны. Из-за симметрии геометрии удерживающего магнитного поля такие ловушки еще называют *аксиально-симметричными ловушками***.**

$sin^2\,\alpha$

Следует отметить, что условие удержания (2.67) в аксиально-симметричной ловушке является универсальным − оно не зависит ни от заряда, ни от массы, ни от величины модуля скорости, а определяется лишь отношением продольной и перпендикулярной (по отношению к магнитному полю) компонент скорости. Правда, это справедливо для отдельной частицы: реально в плазме частицы рассеиваются при столкновениях, направление вектора скорости при этом изменяется, может попасть в опасный конус и частица покинет ловушку. Медленные частицы рассеиваются быстрее (так как для них сечение кулоновского рассеяния больше, $\sigma_c \sim \frac{1}{E^2}$, см. § 6), поэтому они быстрее уходят, и в спектре частиц возникает “провал” в области малых скоростей. Кроме того, с повышением плотности плазмы в игру вступают собственные поля плазмы. Это − причина возникновения неустойчивости, о ней будем говорить позже.

Если магнитное поле в пробке нарастает во времени, то, вследствие сохранения поперечного адиабатического инварианта, увеличивается модуль поперечной компоненты скорости $v_\perp$ и улучшается удержание − при этом изменится пробочное отношение B_m/B_0, и отражение частиц произойдет ближе к центру пробкотрона. Следовательно, область продольных осцилляций частиц сокращается и, согласно (2.65), должна увеличиться и продольная компонента скорости $v_{//}$ за счет сближения отражающих частицу упругих стенок. Точное решение подобной задачи о движении частицы в переменном и неоднородном магнитном поле является сложной проблемой.

Следует отметить, что при сжатии растет и плотность числа частиц, так как при росте магнитного поля возникает вихревое электрическое поле и появляется дрейфовая скорость, направленная так, что частицы собираются к центру системы.

Величину напряженности электрического поля и соответствующую ей скорость дрейфа можно оценить следующим образом. Обозначим радиус области, занятой плазмой, R(t), тогда из теоремы о циркуляции,

$$\int_0^{2\pi} E_\varphi R\, d\varphi = -\frac{1}{c}\int_0^{R(t)} \frac{\partial B_z}{\partial t} 2\pi r dr, \qquad (2.69)$$

получаем

$$E_\varphi = -\frac{R}{2c}\frac{dB_z}{dt}. \qquad (2.70)$$

Приближенно считаем магнитное поле однородным в пределах окружности с радиусом *R(t)*. Определяя далее скорость дрейфа

$$\vec{v}_d = c\frac{E_\varphi}{B_z}\vec{e}_r, \qquad (2.71)$$

приходим к соотношению

$$\frac{dR}{R} = -\frac{1}{2}\frac{dB_z}{B_z}, \qquad (2.72)$$

или

$$R^2 B_z = const. \qquad (2.73)$$

Это соотношение выражает сохранение магнитного потока, пронизывающего поперечное сечение поверхности (часто называемой *дрейфовой поверхностью*), по которой движется частица при её дрейфе в неоднородном магнитном поле (см. рис.2.13,а,б) - еще одного, так называемого *третьего адиабатического инварианта*, после поперечного, отвечающего быстрому вращению по ларморовской окружности, и продольного, отвечающего более медленным продольным осцилляциям частицы между пробками.

Несмотря на внешнее сходство формул (2.59) и (2.73), они отражают различные явления. Согласно формуле (2.59) магнитный поток, пронизывающий ларморовскую окружность, описываемую частицей, остается постоянным, а выражение (2.73) показывает, что радиус области, занятой плазмой, меняется так, чтобы поток через эту область был постоянным. Частицы должны не только изменить радиус вращения, но и переместиться поперек поля.

Если полное число частиц $N=n\Omega$ (где Ω - объем плазмы) остается постоянным, то, грубо определяя объем плазмы как $\Omega \sim R^2 l$, получаем

$$N = n_0 R_0^2 l_0 = nR^2 l,$$

или

$$nl = n_0 l_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 = n_0 l_0 \frac{B}{B_0}. \qquad (2.74)$$

Следовательно, число частиц плазмы в расчете на единицу площади поперечного сечения (погонная плотность) меняется во времени пропорционально напряженности магнитного поля.

Принцип “минимума B”

В центральной части пробкотрона (рис.2.13) магнитное поле убывает по радиусу от центра, поэтому ∇B направлен к центру. Для одиночной частицы – это причина дрейфа по азимуту вокруг оси системы, но частицы разных знаков дрейфуют навстречу друг другу (см. рис.2.13,б), возникает дрейфовый ток, который, очевидно, направлен так, что вызывает уменьшение магнитного поля соленоида. Плазма как бы «выталкивает» удерживающее её магнитное поле. Если плотность плазмы достаточно велика, то эффект будет существенным. Он реально используется для измерения давления плазмы по величине вытесняемого поля - измерения так называемого *диамагнитного сигнала*. Если система идеально симметрична относительно оси, то дрейфовые потоки замкнуты, и накопления заряда не происходит. При нарушении симметрии сценарий последующих

событий приобретает драматический характер. Предположим, что на боковой поверхности плазмы возникает выступ (см. рис.2.13,б) – «плазменный язык». Это возмущение свободно «растекается» вдоль силовых линий, ввиду отсутствия противодействия такому растеканию, а потому быстро превращается в вытянутый вдоль силовых линий магнитного поля желобок. По этой причине обсуждаемую нами сейчас неустойчивость обычно называют *желобковой*. В области желобка дрейфовые потоки не замкнуты, как это схематично показано на рис. 2.13,б. Поэтому здесь произойдет разделение зарядов и возникнет поляризационное электрическое поле *E,* направленное таким образом, что результирующий дрейф в скрещенных $\vec{E} \times \vec{B}$ полях будет способствовать росту первоначального возмущения, завершающегося выбросом плазмы на стенку камеры.

Это проявление диамагнетизма плазмы: она всегда стремится перейти в область более слабого магнитного поля. Поэтому при создании систем для удержания плазмы нужно располагать плазменный сгусток по возможности так, чтобы магнитное поле возрастало от него во всех направлениях, т.е. располагать плазму в области минимального магнитного поля. Именно по возможности, поскольку создание конфигураций магнитного поля, в которых поле нарастало бы во всех направлениях, очевидно, невозможно. Речь может идти лишь о нарастании наружу в среднем, когда вклад участков с благоприятной для удержания кривизной силовых линий превалирует над вкладом участков с неблагоприятной кривизной, где поле убывает. Это, по сути дела, и выражает содержание принципа *«минимума B».* Упрощенно (в деталях см. [11]) соответствующее этому принципу условие можно сформулировать следующим образом. Выделим мысленно в пределах объёма, занимаемого плазмой, силовую трубку длиной l и сечением S, вытянутую вдоль силовых линий и наполненную плазмой. В равновесии такая трубка занимает положение, отвечающее минимальной потенциальной энергии. Сама по себе такая трубка под действием сил давления стремится расшириться. Пусть для простоты давление плазмы в пределах этой трубки постоянно − мы поступаемся здесь строгостью ради наглядности. Итак, плазма стремится увеличить свой объем

$$\Omega = \int dSdl \,. \tag{2.75}$$

Поделив и домножив подынтегральное выражение на величину индукции магнитного поля, запишем эту формулу в виде

$$\Omega = \int (BdS)\frac{dl}{B} \,. \tag{2.76}$$

Поскольку пронизывающий эту трубку магнитный поток

$$\Phi = \int BdS \tag{2.77}$$

постоянный, то эту (положительную!) постоянную можно вынести за знак интеграла, и мы получаем

$$\Omega = \Phi \int \frac{dl}{B} \,. \tag{2.78}$$

Интеграл здесь берется вдоль силовой линии. Чтобы равновесное положение выделенной плазменной трубки было устойчивым, она должна иметь в этом положении максимальный объем. Следовательно, при любом «виртуальном» смещении трубки вариация

$$\delta \int \frac{dl}{B} < 0 \tag{2.79}$$

должна быть отрицательна. Это и есть (в упрощенной форме) содержание *принципа «минимума B».*

Предложены различные способы создания магнитных полей, удовлетворяющих этому принципу: наложение на поле простого пробкотрона “стержней Иоффе” (рис.2.14) (названных так по фамилии автора, впервые предложившего и реализовавшего идею

такой стабилизации), применение специальных катушек типа “бейсбол” (рис.2.15) и др. Соблюдение принципа “минимума В” обязательно, иначе в открытых ловушках плазма устойчиво не удерживается.

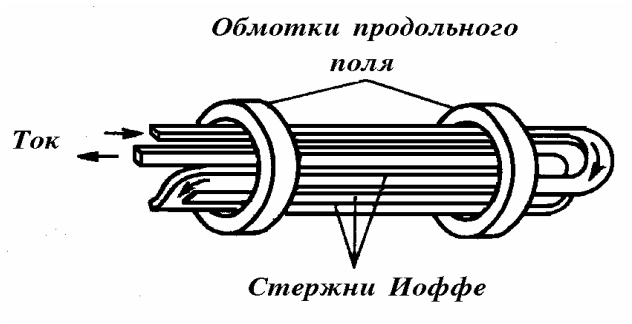


Рис.2.14. Схема создания поля с “минимумом В”



Рис.2.15. Обмотка “бейсбол”

Плазменные центрифуги

В цилиндрических системах с аксиальным полем $\vec{E}$ и радиальным полем $\vec{B}$ (или с аксиальным полем $\vec{B}$ и радиальным полем $\vec{E}$) плазма будет вращаться по азимуту с дрейфовой скоростью $v_E = c\frac{E}{B}$. Второй вариант конструктивно проще, его для определенности и будем обсуждать. Возникает центробежная сила $F = mv_E^2 / r$, тем большая, чем больше масса частицы. Эта центробежная сила направлена по радиусу и в свою очередь создает дрейфовую скорость (разного знака для электронов и ионов, но в упрощенном рассмотрении забудем об электронах), складывающуюся со скоростью v_E. Так как при заданном радиусе эта добавка разная для частиц с разной массой, то между частицами возникает сила трения $F_{\text{тр}}$, направленная по касательной к окружности, тормозящая тяжелые и ускоряющая легкие ионы. Под действием этой силы трения появится дрейф тяжелых частиц от центра, а легких - к центру системы. Ионы будут разделяться по массам, как и в обычной центрифуге, но скорости вращения можно сделать большими, значит, может быть большим и коэффициент разделения. Реально все сложнее и надо учитывать трение за счет столкновений с электронами, термодиффузию, взаимодействие со стенками и т.д. Ведется много исследований по применению подобных центрифуг для разделения элементов (или химических соединений) и даже изотопов.

§ 20. Явления переноса в замагниченной плазме

Плазма, помещенная в магнитное поле, становится анизотропной: направления вдоль магнитного поля и поперек магнитного поля оказываются неравноправными. Это связано с тем, что характер движения заряженных частиц вдоль поля и поперек поля резко отличается. В однородном магнитном поле продольное движение в отсутствии других сил остается свободным, а в поперечном направлении частица вращается по ларморовской окружности, радиус которой тем меньше, чем больше величина поля.

Различие в характере движения частиц находит свое отражение в изменении свойств плазмы, в частности, можно ожидать существенное отличие в величине «продольных» и «поперечных» коэффициентов переноса. Своеобразие плазменной среды, однако, в том, что она зачастую не следует простым, на первый взгляд очевидным, схемам. Такова, например, ситуация с проводимостью - продольная и поперечная проводимости отличаются лишь примерно вдвое. В этом случае говорят о наличии некоторого «механизма восстановления», выравнивающего анизотропию. Обсуждение процессов переноса в «замагниченной» плазме начнем с диффузии.

Диффузия

Столкновения между частицами одного сорта в магнитном поле не приводят к макроскопическим изменениям их распределения в пространстве [12], не приводят, тем самым, к диффузии. Диффузия возможна лишь при столкновении разнородных частиц, например ионов и электронов плазмы. Напомним, что диффузионный поток (если отвлечься от эффектов термодиффузии и бародиффузии) пропорционален градиенту концентрации плазмы, при этом направление потока противоположно градиенту концентрации, а коэффициент пропорциональности и есть коэффициент диффузии.

Коэффициент продольной диффузии плазмы, помещенной в магнитное поле, имеет такую же величину, как и коэффициент диффузии плазмы в отсутствие магнитного поля:

$$D_{||} = D_0 = \frac{1}{3}\lambda v_{Te} = \frac{T_e}{m_e}\tau_{ei}. \qquad (2.80)$$

Поскольку перемещение поперек магнитного поля после столкновения определяется величиной ларморовского радиуса ρ, а также временем между электрон-ионными столкновениями, τ_{ei}, то коэффициент поперечной диффузии, как это следует из общего определения $D \sim <(\Delta x)^2>/\tau$ (см. §10), должен определяться соотношением:

$$D_{\perp} \sim \frac{\rho^2}{\tau_{ei}}. \qquad (2.81)$$

Поскольку диффузия плазмы носит амбиполярный характер, то в качестве характерного размера в формулу (2.81) следует подставлять меньший ларморовский радиус, в данном случае - электронный. Поскольку электронный ларморовский радиус определяется тепловой скоростью электронов v_{Te} и электронной циклотронной частотой ω_{Be}:

$$\rho_e \sim \frac{v_{Te}}{\omega_{Be}},$$

то, после подстановки в (2.81), легко получить

$$D_{\perp} \cong \frac{D_{||}}{(\omega\tau_{ei})^2}. \qquad (2.82)$$

Величина произведения $\omega_{Be}\tau_{ei}$ характеризует замагниченность частиц (иногда её называют *параметром замагниченности*), т.е. характеризует степень влияния магнитного поля на их движение. Если это произведение велико, то частица между столкновениями совершает много ларморовских оборотов. Выражение (2.82) применимо к случаю сильно

замагниченной плазмы, но его нетрудно обобщить. В случае слабого поля коэффициенты продольной и поперечной диффузии должны совпадать $D_\perp/D_{/\!/}\sim 1$, а для сильного поля, фактически, $D_\perp / D_{||} \sim (\omega_{Be}\tau_{ei})^{-2}$. Поэтому в общем случае должно быть [13]:

$$D_\perp \sim D_{||} \frac{1}{1+(\omega_{Be}\tau_{ei})^2}. \qquad (2.83)$$

Если учесть различие ионной и электронной температур, то выражение для коэффициента диффузии поперек поля принимает следующий вид [12]:

$$D_\perp \cong \frac{T_e + T_i}{T_e} \frac{D_0}{1+(\omega_{Be}\tau_{ei})^2}.$$

В сильном магнитном поле, когда параметр замагниченности велик, диффузия поперек поля должна происходить очень медленно. Подчеркнем, что существенно отличается и характер зависимости коэффициентов диффузии от параметров плазмы. Согласно выражению (1.54), для коэффициента продольной диффузии имеем $D_0 \sim T^{5/2}/n$, а так как $\omega_{Be}\sim B$, $\tau_{ei}\sim T^{3/2}/n$, то для коэффициента поперечной диффузии замагниченной плазмы получаем

$$D_\perp \sim \frac{n}{B^2\sqrt{T}}. \qquad (2.84)$$

Мы видим, что коэффициент продольной диффузии уменьшается с ростом плотности плазмы и растет с ростом её температуры, а поперечной, напротив, растет с ростом плотности и уменьшается с ростом температуры!

Тот факт, что коэффициент поперечной диффузии быстро убывает с ростом величины магнитного поля и к тому же должен уменьшаться по мере нагрева плазмы, и определило надежду обеспечить термоизоляцию плазмы с помощью сильного магнитного поля. К сожалению, существуют и другие причины, приводящие к возникновению потоков плазмы поперек магнитного поля, значительно превышающих потоки, вызываемые классической столкновительной диффузией. Наиболее существенными из них являются неустойчивости, о них будем говорить позже. Но и в однородном поле, в спокойной бестоковой плазме могут возникать местные электрические поля, появление которых также приводит к перераспределению концентрации, к диффузии.

Такие процессы получили название турбулентной диффузии. Качественно можно ее описать, предположив, что масштаб возникающих флуктуационных электрических полей определяется соотношением:

$$elE \sim T. \qquad (2.85)$$

Другими словами, характерная энергия, которую набирают частицы (с зарядом e) в поле, оказывается порядка тепловой энергии плазмы. В пределах области, протяженность которой порядка l, плазма дрейфует под действием скрещенных $E\times B$ полей. Если направление поля меняется хаотически, то в соседних областях с изменением направления электрического поля меняется и направление дрейфа – плазма движется со скоростью

$$v_E = c\frac{E}{B}, \qquad (2.86)$$

и беспорядочно меняет направление своего движения. Флуктуационные ячейки живут короткое время, порядка времени пролета $\tau \sim l/v_E$. Изучение движения частиц в подобных турбулентных полях является сложной, самостоятельной задачей. Упрощенно его можно трактовать как диффузию (часто используют термин *турбулентная диффузия*) с эффективным коэффициентом диффузии, определяемом величиной l из (2.85) и v_E из (2.86),

$$D_{Турб} \sim \frac{<(\Delta x)^2>}{\tau} \sim \frac{l^2}{\tau} \sim v_E l \sim \frac{cT}{eB} \qquad (2.87)$$

Эта полученная из нестрогих качественных соображений формула фактически совпадает с эмпирической формулой Бома, полученной из анализа экспериментальных результатов:

$$D_B = \frac{1}{16}\frac{c}{e}\frac{T}{B}. \qquad (2.88)$$

Коэффициент диффузии, определяемый этой формулой, носит название *бомовского коэффициента диффузии*. Зависимости величин D_B и $D_\perp$ от величины магнитного поля различны. Сравнивая выражения (2.82) и (2.88), находим для отношения коэффициентов диффузии

$$D_B/D_\perp \sim \omega_{Be}\tau_{ei} \sim BT^{3/2}/n, \qquad (2.89)$$

т.е. в замагниченной плазме, когда за время между столкновениями электрон успевает совершить много ларморовских оборотов, определяющую роль должна играть турбулентная диффузия. Следует отметить, что с увеличением температуры коэффициент классической диффузии $D_\perp$ уменьшается, а турбулентной, $D_{Турб}$, − растет. Это означает, что диффузия «по Бому» практически не оставляет надежд на длительное удержание горячей плазмы магнитным полем.

Неоклассическая диффузия

Необходимо отметить, что в ряде экспериментов со спокойной, практически равновесной, холодной плазмой (на так называемых *Q-машинах*) неоднократно наблюдалась диффузия, коэффициент которой весьма близок к классическому значению.

На других установках, в частности, на стеллараторах измеряемое время удержания плазмы соответствовало коэффициенту диффузии значительно превышающему классический и близкому по величине к определяемому формулой Бома. В то же время измеренные на установках типа токамака, созданных отечественными учеными, величины коэффициента диффузии оказались больше классического, но значительно меньше бомовского коэффициента диффузии.

Превышение коэффициента диффузии в столкновительном режиме над его классическим значением, полученным для однородного поля, находит объяснение, как впервые было показано Пфиршем и Шлютером, в изменении геометрии поля. В геометрии неоднородного магнитного поля токамака (рис. 2.16), существенную роль играют дрейфы. Дрейфовые поверхности отличаются от магнитных поверхностей. При этом сдвиг может превышать величину ларморовского радиуса. В результате при столкновении частица смещается поперек поля на расстояние, превышающее ларморовский радиус, что и вызывает эффективное увеличение коэффициента поперечной диффузии, который оказывается равным:

$$D_{ПШ} = (1+q^2)D_\perp . \qquad (2.90)$$

где $q>1$ - коэффициент запаса устойчивости, равный отношению шага силовой линии к длине системы вдоль оси.

Качественно этот результат можно получить следующим образом. В винтовом поле характерным размером является шаг силовой линии, пусть h. Частица, движущаяся со скоростью v, пролетает расстояние порядка шага за время $t_{прол}\sim h/v$, и за это время сдрейфовывает поперек поля на расстояние

$$\Delta_{прол} \sim v_d t_{прол} .$$

Здесь v_d - скорость дрейфа по бинормали, которую, грубо считая $v_{||}\sim v_\perp \sim v_T$, оцениваем, согласно (2.36), как

$$v_d = \frac{v_\perp^2 + 2v_{||}^2}{2R\omega_B} \sim \frac{v_T^2}{R\omega_B}, \qquad (2.91)$$

где R – большой радиус тора, ω_B – циклотронная частота, а v_T – тепловая скорость движения частиц. Тогда

$$\Delta_{прол} \sim v_d \frac{h}{v} \sim \frac{v^2}{R\omega_B}\frac{h}{v} \sim q\rho_B , \qquad (2.92)$$

где ρ_B -ларморовский радиус, а $q=h/2\pi R$. – коэффициент запаса устойчивости.

Увеличение в q раз характерного размера приводит к соответствующему увеличению коэффициента диффузии, и в *режиме Пфирша-Шлютера* должно быть:

$$D_{ПШ} \sim q^2 D_\perp \qquad (2.93)$$

Заменив здесь q^2 на $1+q^2$, чтобы получить аккуратный переход к случаю магнитного поля с прямыми силовыми линиями, когда $q\to 0$, приходим к формуле (2.90).

Подчеркнем еще раз, что полученное увеличение коэффициента диффузии не связано с учетом каких-либо турбулентных пульсаций, а лишь с аккуратным учетом геометрии магнитного поля. В этом плане формула Пфирша-Шлютера также описывает классическую столкновительную диффузию поперек поля, но в магнитном поле тороидальной геометрии при наличии вращательного преобразования. При этом столкновения считаются достаточно частыми. Поясним, как можно получить отвечающую этому требованию граничную частоту столкновений. Очевидно, необходимо сравнить характерное время между столкновениями $\sim \nu^{-1}$ и характерное пролетное время $\sim h/v$, с тем, чтобы получить для режима Пфирша-Шлютера:

$$\nu > \nu_{ПШ} \sim \frac{v}{qR}. \qquad (2.94)$$

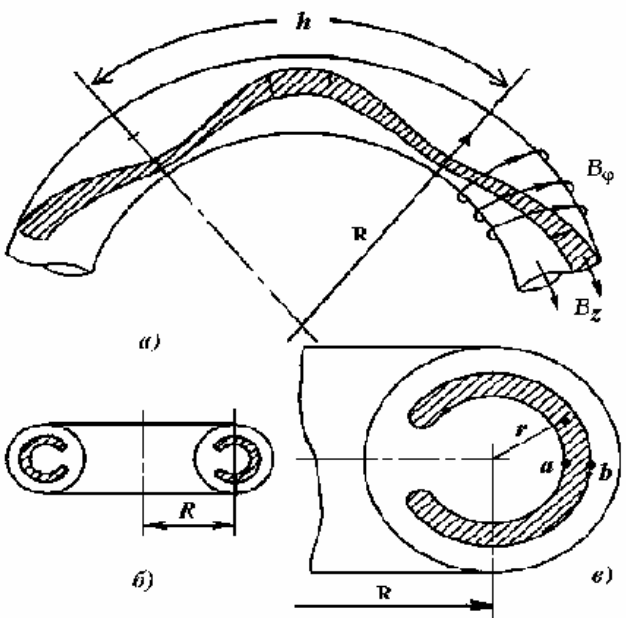


Рис.2.16. Схема образования локальных пробок в токамаках (а); схематическое изображение проекций траекторий запертых частиц на сечение токамака, перпендикулярное к его большому диаметру (б и в)

При выполнении этого условия частицы успевают столкнуться раньше, чем пролетят характерный размер порядка шага винта.

При меньших частотах столкновений, как впервые показали Галеев и Сагдеев [14], оказывается существенным учесть ещё одну важную особенность в характере движения частиц в тороидальном поле с винтовыми силовыми линиями. Винтовые силовые линии, «намотанные на тор», сгущаются на внутреннем обводе тора и разрежаются на внешнем (рис. 2.16,а). Уместная аналогия: представим себе намотанную с постоянным шагом из гибкой проволоки прямую спираль. Если её изогнуть в каком-либо месте, то на внутренней части в месте изгиба витки сгущаются, а на внешней - расходятся. В местах сгущения силовых линий магнитное поле больше и поэтому здесь располагаются локальные пробки так же, как и в пробкотронах, способные отражать частицы, скорость которых имеет достаточно большой угол наклона по отношению к направлению магнитной силовой линии. Конечно, геометрия магнитного поля в этих «пробкотронах» сложнее, чем в аксиально-симметричных ловушках, но суть дела остаётся прежней: часть частиц плазмы с малой продольной скоростью отражается в пробках и оказывается захваченной. Применительно к токамакам для них сложился термин *запертые частицы***.** Остальные частицы, и их подавляющее большинство, не удерживаются в пробках, а потому называются *пролетными частицами***.** Если тор тонкий, так что отношение радиуса сечения тора к радиусу тора является малой величиной, $\varepsilon = r/R << 1$, то «пробочное отношение» в этом случае отличается от единицы лишь на малую величину $\sim \varepsilon$. По этой причине, очевидно, запертыми будут лишь те частицы (вспомним определение угла раствора опасного конуса потерь (2.67)), у которых мала продольная скорость $v_{||}/v < \sqrt{\varepsilon} << 1$. Их относительное число по плотности (при равнораспределении по углам) также, очевидно, невелико, и составляет $n_{зап}/n_{прол} < \sqrt{\varepsilon} << 1$. В этом можно легко убедиться, оценив объем в скоростном пространстве, приходящийся на долю запертых частиц.

Хотя запертых частиц относительно мало, но они дают заметный вклад в диффузию. Это связано с особенностью их траекторий. Поскольку продольная скорость запертых частиц мала, то за время движения от пробки к пробке они «выдрейфовывают» поперек магнитного поля значительно дальше, чем пролётные частицы. Действительно, длину порядка шага винта запертая частица пролетает за время

$$t_{зап} \sim \frac{h}{v_{\parallel}} \sim \frac{h}{v\sqrt{\varepsilon}} = \frac{t_{прол}}{\sqrt{\varepsilon}}, \qquad (2.95)$$

и смещается за счет дрейфа поперек поля на расстояние

$$\Delta_{зап} \sim v_d t_{зап} \sim \frac{\Delta_{прол}}{\sqrt{\varepsilon}} >> \Delta_{прол}. \qquad (2.96)$$

При столкновении, изменив скорость, частица опишет другую траекторию, сместившись при этом поперек поля в среднем на расстояние (2.96), что и обуславливает увеличение коэффициента диффузии.

Осцилляцию запертых частиц между локальными пробками сопровождает «выдрейфование» поперек магнитного поля. При этом в проекции на сечение тора поперечное смещение относительно средней линии меняет знак, и в результате проекция траекторий запертых частиц на поперечное сечение тора напоминает известный субтропический плод (рис.2.16,б,в) – по этой причине говорят о диффузии *«в банановом режиме»*. Элементарная теория [11] дает следующую оценку для величины коэффициента усиления диффузии в банановом режиме:

$$\frac{D_{бан}}{D_{ПШ}} = \varepsilon^{-3/2} = \left(\frac{R}{r}\right)^{3/2} >> 1. \qquad (2.97)$$

Сами «бананы» могут существовать, не разрушаясь, пока частота столкновений достаточно мала

$$\nu < \nu_{бан} = \frac{v}{qR}\varepsilon^{3/2} = \nu_{ПШ}\varepsilon^{3/2}. \qquad (2.98)$$

В обоих режимах и частых столкновений, $\nu > \nu_{ПШ}$, и редких столкновений, $\nu < \nu_{бан}$, коэффициент диффузии, очевидно, прямо пропорционален частоте столкновений (см. рис. 2.17), но угловой коэффициент этой пропорциональности существенно разный. В промежуточной области частот, когда «бананы» уже разрушаются, но столкновения ещё редкие, основной вклад в диффузию дают *медленные пролетные частицы*, а коэффициент диффузии почти не зависит от частоты столкновений – это *режим плато*. Величину коэффициента диффузии в режиме плато можно оценить, подставив в формулу Пфирша-Шлютера вместо частоты столкновений $\nu = \nu_{ПШ}$.

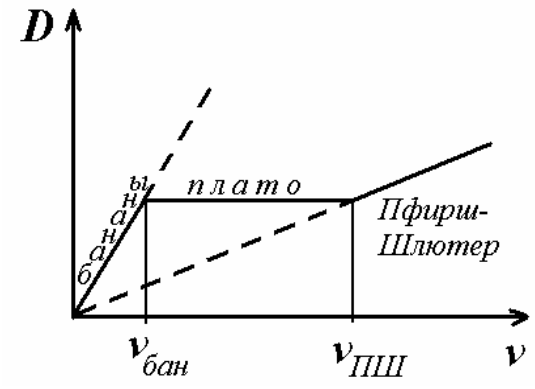


Рис. 2.17. Зависимость «неоклассического» коэффициента диффузии от частоты столкновений

Превышение коэффициента диффузии над его классическим значением получило название *неоклассической диффузии*, а теория Галеева и Сагдеева, объясняющая причину этого превышения, называется *неоклассической теорией диффузии*, или, кратко, *неоклассикой*. Эксперименты подтверждают эту неоклассическую теорию.

Теплопроводность

С точки зрения газокинетической теории коэффициент теплопроводности равен коэффициенту диффузии, умноженному на плотность (1.61):

$\kappa = Dn$.

Это правило может быть формально применено к плазме, как для вычисления $\kappa_{\parallel}$, так и для $\kappa_{\perp}$. Следует лишь учесть, что в отличие от диффузии, возможной лишь при столкновении разнородных частиц, в переносе тепла, напротив, главную роль играют столкновения одинаковых частиц. Следует иметь в виду, что при заданной плотности коэффициент теплопроводности вдоль магнитного поля $\kappa_{\parallel}$ согласно выражениям (2.80) и (1.61), пропорционален длине свободного пробега частицы и в максвеллизованной плазме больше для электронов (примерно в корень из отношения масс, $\sim(m_i/m_e)^{1/2}$, раз) , а коэффициент теплопроводности поперек магнитного поля, согласно выражению (2.82), больше для ионов (также примерно в корень из отношения масс, $\sim(m_i/m_e)^{1/2}$, раз).

Таким образом, согласно классическим представлениям, в замагниченной плазме вдоль магнитного поля тепло переносят главным образом электроны, а поперек магнитного поля – ионы.

Отметим, что неоклассические соображения могут быть перенесены и на теплопроводность. Особенности движения частиц в поле сложной геометрии и здесь приводят к изменению величины коэффициента процесса переноса тепла. Правда, в экспериментах на токамаках наблюдается аномально большой по сравнению с неоклассическим теплоперенос электронами.

Проводимость плазмы в магнитном поле

- **Проводимость плазмы вдоль магнитного поля.**

Наложение на плазму магнитного поля не оказывает влияния на движение частиц вдоль поля и, следовательно, не влияет на продольную проводимость, определяемую составляющей электрического поля, направленной параллельно магнитному полю:

$$j_{\parallel} = \sigma_{\parallel} E_{\parallel}, \qquad \sigma_{\parallel} = \sigma_0 \sim \frac{T_e^{3/2}}{\Lambda}. \tag{2.99}$$

где σ_0 - проводимость плазмы в отсутствие магнитного поля.

- **Поляризация плазмы.**

Если плазму, находящуюся в магнитном поле, поместить в электрическое поле E, перпендикулярное к магнитному полю, то согласно дрейфовым представлениям у электронов и ионов появится одинаковая скорость $v_E = c\frac{E}{B}$. Поэтому тока не будет, однако, произойдет некоторое разделение зарядов – плазма поляризуется: частицы будут двигаться по трохоидам, смещаясь от первоначального положения на некоторые величины Δ_e, Δ_i. Если пренебречь тепловой скоростью, приняв начальную скорость равной нулю, то трохоида вырождается в циклоиду (см. рис. 2.2), а величина среднего смещения $\Delta_{e,i}$ будет равна ларморовскому радиусу, который следует вычислять по величине дрейфовой скорости.

Пусть вектор напряженности магнитного поля B направлен вдоль оси Z системы координат, а вектор напряженности электрического поля E - вдоль оси Y (см. рис.2.18). Скорость дрейфа в скрещенных электрическом и магнитном полях будет направлена параллельно оси X. Модули средних смещений для электрона $<\Delta_e>$ и иона $<\Delta_i>$ равны соответственно:

$$<\Delta_e> = \rho_{Be} = \frac{m_e v_E c}{eB}; \quad <\Delta_i> = \rho_{Bi} = \frac{m_i v_E c}{eB}, \tag{2.100}$$

где $v_E = c\frac{E}{B}$, а заряды частиц по величине считаются одинаковыми.

Заряды в среднем “разойдутся” на величину

$$\Delta = < \Delta_e > + < \Delta_i > = \frac{(m_e + m_i)c^2 E_\perp}{eB^2}. \qquad (2.101)$$

Умножив эту величину на заряд и на плотность, получим дипольный момент P единицы объема

$$P = ne\Delta = \frac{n(m_e + m_i)c^2 E}{B^2} = \rho_m c^2 \frac{E}{B^2}, \qquad (2.102)$$

и поперечную по отношению к направлению магнитного поля компоненту диэлектрической проницаемости плазмы

$$\varepsilon_\perp = 1 + 4\pi \frac{P}{E} = 1 + 4\pi\rho_m \frac{c^2}{B^2}. \qquad (2.103)$$

В обеих формулах $\rho_m = n(m_e + m_i)$ - массовая плотность плазмы.

Расчеты показывают, что величина $\varepsilon_\perp$ может быть большой, поэтому поле в плазме сильно ослабляется. Например, для дейтериевой плазмы с параметрами n=10^{10}см$^{-3}$, B=10^3Гс получаем $\varepsilon_\perp \approx 10^2$. Если электрическое поле медленно меняется во времени, так что временной масштаб его изменения значительно превышает ларморовский период, то приведенная формула для $\varepsilon_\perp$ справедлива и в этом случае. Напомним, что формула (2.103) ранее была получена при рассмотрении поляризационного дрейфа.

Диэлектрические свойства плазмы в магнитном поле претерпевают существенное изменение, величины $\varepsilon_\parallel$ и $\varepsilon_\perp$ различны, и диэлектрическая проницаемость замагниченной плазмы становится тензорной величиной. При этом компонента $\varepsilon_\parallel$ остается такой же, как и в случае плазмы без магнитного поля. Она зависит от частоты падающей волны и плотности числа частиц плазмы, тогда как компонента $\varepsilon_\perp$ – от массовой плотности плазмы и напряженности магнитного поля.

- **Поперечная проводимость.**

Картина со свободным дрейфом плазмы в скрещенных полях справедлива лишь при условии, что нет причин, мешающих этому свободному движению плазмы. Реализовать такой случай можно, например, в случае аксиально-симметричного соленоида с дополнительным радиальным электрическим полем. Если ось Z направить вдоль оси соленоида, а ось Y – по радиусу, тогда ось X соответствует вращению по углу φ вокруг оси соленоида. Такие системы существуют, и в движущейся плазме удается накапливать весьма заметную энергию - по существу создаются плазменные конденсаторы с большим значением $\varepsilon_\perp$. Другое применение – плазменные центрифуги – было рассмотрено ранее.

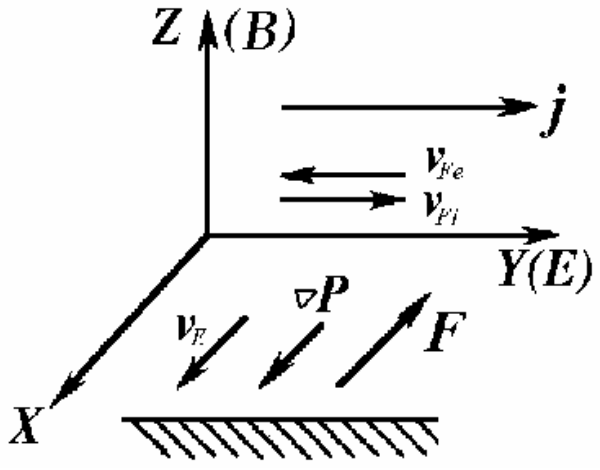


Рис.2.18. Схема восстановления проводимости

Если же по направлению дрейфа возникает какое-либо препятствие, то происходит перераспределение плотности частиц, так как вблизи препятствия частицы накапливаются. В результате возникает градиент давления и сила (в расчете на одну частицу) $F = -\nabla p/n$. Эта сила приводит к появлению дополнительного дрейфа, причем электроны и ионы дрейфуют в разные стороны – возникает ток. Таким образом, восстанавливается проводимость поперёк магнитного поля B.

На рис. 2.18 поле B направлено вдоль оси Z, а поле E - вдоль оси Y и возникает дрейф вдоль оси X. Если имеется какое-либо препятствие, то вблизи него плотность повышается; возникает ∇p и отвечающая ему сила F. Дрейф под действием силы F направлен для ионов вдоль оси Y, для электронов - антипараллельно Y. Появляется ток j, направленный вдоль оси Y, то есть вдоль вектора напряженности электрического поля - проводимость «восстанавливается». Вычисляя этот

ток, надо учитывать трение, возникающее при относительном движении электронов и ионов.

Точный вывод, строго учитывающий взаимодействие ионов и электронов [13], показывает, что поперечная проводимость не равна продольной, $\sigma_\perp \neq \sigma_\parallel$, т.е. проводимость плазмы анизотропна. При этом отношение $\sigma_\perp/\sigma_\parallel$ зависит от зарядового числа иона. Для ионов с Z=1, например, для водородной плазмы

$$\sigma_\perp \approx 0{,}5\sigma_\parallel \tag{2.104}$$

В общем случае ток течет под углом к направлению электрического поля, и закон Ома для плазмы выглядит следующим образом [13]:

$$\vec{E}' = \frac{\vec{j}_\parallel}{\sigma_\parallel} + \frac{\vec{j}_\perp}{\sigma_\perp} + \frac{1}{enc}[\vec{j}\vec{B}], \tag{2.105}$$

Здесь справа выделены все слагаемые, в которые входит плотность тока, в том числе последнее из них отвечает эффекту Холла, а слева в формуле фигурирует эффективное поле, равное

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{V}\vec{B}] + \frac{1}{en}(\nabla p_e - \vec{R}_T). \tag{2.106}$$

Здесь первое слагаемое – напряженность электрического поля, второе учитывает эффект индукции, возникающий при пересечении потоком плазмы силовых линий магнитного поля, третье связано с градиентом электронного давления, а последнее учитывает влияние термо-ЭДС, возникающей из-за *термосилы*, в сильно замагниченной плазме примерно равной:

$$\vec{R}_T = -0.71 n_e(\vec{b}\nabla)T_e - \frac{3}{2}\frac{n_e}{\omega_e \tau_{ei}}[\vec{b}\nabla T_e], \quad \vec{b} = \frac{\vec{B}}{B}. \tag{2.107}$$

Формула (2.105) представляет собой, по существу, одну из возможных форм записи закона Ома для замагниченной плазмы. Из неё следует, что в сильном магнитном поле в направлении вдоль поля соотношение между соответствующей компонентой напряженности электрического поля и плотности электрического тока такое же, как и в отсутствие магнитного поля

$$E'_\parallel = \frac{j_\parallel}{\sigma_\parallel}. \tag{2.108а}$$

Поперечная составляющая, однако, претерпевает существенное изменение: эффективное поле оказывается практически перпендикулярным к току. Проекция поперечного поля на ток связана с поперечной компонентой плотности тока соотношением, которое фактически не сильно отличается от предыдущего:

$$E'_{\perp j} = \frac{j_\perp}{\sigma_\perp}. \tag{2.108б}$$

Но для протекания тока поперек магнитного поля нужна составляющая эффективного поля, перпендикулярная и к магнитному полю, и к току - это так называемое *холловское поле*:

$$\vec{E}'_{Холл} = \frac{1}{enc}[\vec{j}\vec{B}] = \frac{\omega_{Be}\tau_{ei}}{\sigma_\perp}[\vec{j}\vec{B}]. \tag{2.109}$$

Зачастую холловское поле возникает в плазме автоматически за счет небольшого нарушения квазинейтральности, а внешние поля, которые надо прикладывать к плазме, определяются соотношениями (2.108,а) и (2.108,б). Иногда говорят, что магнитное поле не влияет на проводимость плазмы. Это надо понимать именно в указанном смысле.

- **Дрейфовые токи.**

Всегда, когда возникает градиент давления, появляется и отвечающая ему сила, в расчете на одну частицу (электрон или ион), равная $\vec{F}_{e,i} = -\nabla p_{e,i}/n$. Она вызывает дрейф частиц плазмы со скоростью

$$\vec{v}_d = \frac{c}{e}\frac{\vec{F}\times\vec{B}}{B^2} = \frac{c}{en}\frac{\vec{B}\times\nabla p}{B^2}, \tag{2.110}$$

причем частицы с зарядами разных знаков дрейфуют в противоположные стороны. Это приводит к переносу заряда, т.е. к проводимости, появлению так называемых токов намагничения или дрейфовых токов

$$\vec{j} = \sum_{e,i} ne\vec{v}_d = c\frac{\vec{B}\times\nabla p}{B^2}. \tag{2.111}$$

Появление электрических токов вследствие неэлектрических причин – специфическая особенность плазмы, присущая ей всегда, когда есть какие-либо неоднородности плазмы.

Из теории магнетизма [15] известно, что намагничение среды $\vec{I}$ и плотность молекулярных токов $\vec{j}_\mu$ связаны соотношением

$$\vec{j}_\mu = c\,rot\,\vec{I}\,. \qquad (2.112)$$

В плазме намагничение равно сумме магнитных моментов частиц в единице объема: $\vec{I} = n < \vec{\mu} >$ и, следовательно, в соответствии с (2.9),

$$\vec{I} = \sum_{e,i} n < \frac{mv_\perp^2}{2B^2} > \vec{B}\,. \qquad (2.113)$$

Так как движение, перпендикулярное магнитному полю, имеет две степени свободы, то, производя усреднение, и обозначив $p_\perp = nT_\perp$, получаем

$$\vec{j} = -c\,rot\,\frac{p_\perp \vec{B}}{B^2}\,. \qquad (2.114)$$

В этой форме записи учитываются дрейфовые токи, возникающие вследствие градиента плотности и градиента магнитного поля. Если магнитное поле однородно, то формула (2.114) фактически совпадает с (2.111).

ГЛАВА 3

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПИСАНИЯ ПЛАЗМЫ

§ 21. Идеальная одножидкостная гидродинамика плазмы. Условия применимости

До сих пор мы рассматривали плазму как совокупность отдельных заряженных частиц и исследовали их движение в заданных полях. Однако такой подход к описанию плазменных явлений не может претендовать на полноту. При движении заряженных частиц плазмы возникают токи и отвечающее им магнитное поле, в свою очередь влияющее на движение частиц, которое, таким образом, оказывается самосогласованным с полем. Плазму с этой точки зрения можно рассматривать как сплошную среду, как некую проводящую субстанцию − проводящий газ. Если скорости движения плазмы не слишком велики (значительно меньше скорости звука), то роль сжимаемости этой субстанции незначительна, а уравнения газодинамики и гидродинамики совпадают; тогда плазму можно рассматривать как проводящую жидкость. Такой подход к описанию динамических процессов в плазме получил название *магнитной гидродинамики* или сокращенно МГД. Впервые он был предложен в сороковых годах двадцатого столетия Альвеном применительно к динамике космической плазмы. Поведение проводящей жидкости в магнитном поле в большой степени определяется ее электрической проводимостью, именно она обуславливает скорость проникновения магнитного поля в проводник. В идеальный проводник магнитное поле, как известно, вообще не может проникнуть. Однако если в проводнике уже есть магнитное поле, то это поле будет "вморожено" в него − при своем движении проводник увлечет за собой магнитное поле. Реально плазма всегда имеет конечную проводимость, но если интересующие нас процессы протекают быстро, за времена, значительно меньшие времени проникновения магнитного поля в плазму, то плазму можно рассматривать как идеальный проводник.

Как известно [15], время τ_s (так называемое *скиновое время*) проникновения поля на заданную глубину δ в проводнике определяется по формуле

$$\tau_s = \frac{4\pi\sigma}{c^2}\delta^2 = \frac{\delta^2}{D_{маг}}, \qquad (3.1)$$

где σ - проводимость;

$$D_{маг} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \text{ -} \qquad (3.2)$$

коэффициент магнитной диффузии поля в проводник. Для времен $t << \tau_s$ плазму можно рассматривать как идеальный проводник с вмороженным в него магнитным полем. Таким образом, одно из условий применимости приближения идеальной гидродинамики к плазме состоит в том, что длительность процесса t должна быть меньше скинового времени τ_s.

Кроме того, магнитную гидродинамику обычно применяют к описанию плазмы в достаточно сильном магнитном поле и влиянием конечности ларморовского радиуса пренебрегают. Это возможно, если характерный размер области, занятой плазмой, L значительно больше ларморовского радиуса иона. Наконец, необходимо обеспечить квазинейтральность плазмы. Все эти условия можно записать в виде

$$\begin{aligned} &t << \tau_s, \\ &L >> \rho_i \\ &Zn_i - n_e = 0. \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Установив такие ограничения (на самом деле, они более жесткие), можно применить для описания динамики плазмы уравнения магнитной гидродинамики, дополненные уравнениями Максвелла.

Магнитогидродинамическое представление плазмы может быть расширено рассмотрением не однокомпонентной проводящей жидкости, а смеси двух компонент – электронной и ионной. Такое обобщение становится необходимым, когда в плазме протекает ток с заметной плотностью и уже нельзя считать, что скорости компонент плазмы совпадают, как это принято в одножидкостной гидродинамике. Двухжидкостное рассмотрение расширяет возможности метода, однако, на практике приходится пользоваться и гидродинамическими и кинетическими представлениями совместно, так как гидродинамика не может отразить некоторые существенные стороны процесса.

§ 22. Основные уравнения

Основу любой гидродинамики составляют три закона сохранения – массы, импульса и энергии. При этом основными параметрами, характеризующими движение среды, являются массовая плотность, массовая скорость и давление, зависящие в общем случае от времени и координат. В магнитной гидродинамике, кроме того, вводят плотность электрического тока и вектор индукции магнитного поля. Для их определения уравнения динамики проводящей среды дополняют уравнениями Максвелла.

Введем следующие обозначения:

- *плотность массы*

$$\rho = \sum_{(\alpha)} n_\alpha m_\alpha = \sum_{i} n_i m_i ,$$

здесь α - индекс сорта частиц (электроны, ионы). Так как масса иона значительно превосходит массу электрона, $m_i >> m_e$ то вкладом массы электронов в плотность ρ обычно пренебрегают;

- *массовая скорость*

$$\vec{v} = \frac{1}{\rho} \sum_{(\alpha)} n_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha \approx \vec{v}_i ,$$

по той же причине примерно равна скорости ионной компоненты;

- *плотность заряда*

$$\rho_q = \sum_{(\alpha)} n_\alpha q_\alpha = |e|(z n_i - n_e) ,$$

где $|e|$ - абсолютная величина заряда электрона;

- *плотность тока*

$$\vec{j} = \sum_{(\alpha)} n_\alpha q_\alpha \vec{v}_\alpha .$$

Если предполагается, что скорость электронов v_e значительно превосходит скорость ионов v_i, то

$$\vec{j} = -|e| n_e \vec{v}_e .$$

Используя принятые обозначения, запишем:

- *Закон сохранения массы* (неразрывности струи):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0 . \qquad (3.4)$$

- *Уравнение движения единицы объема плазмы* (сохранения импульса):

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} - \nabla p + \vec{F} , \qquad (3.5)$$

где $p = p_e + p_i$ - полное давление плазмы, равное сумме давлений электронов и ионов, $\vec{F}$ - внешняя сила (например, сила тяжести), $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}$ – полная производная (так называемая *субстациональная производная*) по времени от скорости плазмы.

Уравнение (3.5) может быть получено суммированием уравнений движения для электронов и ионов (см. формулу (2.1)) с последующим пренебрежением конечностью инерции электронов. Во многих конкретных случаях в уравнении (3.5) силой F можно пренебречь.

- *Уравнения Максвелла:*

$$div\,\vec{E} = 4\pi\rho_q = 4\pi|e|(zn_i - n_e);$$
$$div\,\vec{B} = 0; \qquad (3.6)$$
$$rot\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};$$
$$rot\,\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}.$$

Предполагается, что все процессы медленные и токами смещения можно пренебречь, что и использовано в последнем из уравнений (3.6).

- *Закон Ома* (согласно работе [13]):

$$\vec{E}' = \frac{\vec{j}_\perp}{\sigma_\perp} + \frac{\vec{j}_\parallel}{\sigma_\parallel} + \frac{1}{cn_e|e|}\vec{j}\times\vec{B}, \qquad (3.7)$$

где E' - эффективное поле, обусловленное в общем случае не только приложенной внешней ЭДС, но и самим движением плазмы, а также наличием электронного давления и перепада электронной температуры; $\sigma_{\parallel,\perp}$ - продольная и поперечная (по отношению к направлению магнитного поля) проводимость плазмы; $\frac{1}{cn_e|e|}\vec{j}\times\vec{B}$ - холловское поле.

Употребительно несколько различных форм записи закона Ома для плазмы. Это связано с тем, что в зависимости от конкретных условий может оказаться наиболее существенной та или иная причина возникновения ЭДС (подробнее см.[13]). Часто используется следующая упрощенная форма записи закона Ома:

$$\vec{j} = \sigma\left[\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B} - \frac{1}{n|e|c}\vec{j}\times\vec{B} + \frac{1}{n|e|}\nabla p_e\right]. \qquad (3.8)$$

- *Уравнение состояния* - это соотношение вида:

$$p = p(\rho, T). \qquad (3.9)$$

Уравнение состояния приобретает простой вид, если плазму можно считать идеальной. Для классического идеального газа, как известно, уравнение состояния

$$p = nT.$$

где n – концентрация (плотность числа частиц) газа. Для смеси двух идеальных «газов» – «газа» электронов с концентрацией n_e и «газа» ионов с концентрацией n_i

$$p = n_eT_e + n_iT_i.$$

В частном случае идеальной квазинейтральной изотермической плазмы, когда температуры и концентрации ее компонент совпадают $T_e=T_i=T$, $n_e=n_i=n$, это уравнение приобретает особенно простой вид

$$p = 2nT. \qquad (3.10)$$

Но теперь в уравнениях динамики плазмы появляется дополнительный параметр – температура, и необходимо указать правило его вычисления, выражающее баланс тепла. В общем случае это достаточно сложное уравнение, учитывающее конечную теплопроводность плазмы, вязкое тепловыделение, джоулево тепло, обусловленное протеканием по плазме тока и другие источники нагрева или охлаждения плазмы. Мы не будем его выписывать, детальный анализ баланса тепла в плазме можно найти, например, в [13].

Применительно к рассматриваемой одножидкостной магнитной гидродинамике в конкретных приложениях часто используются различные упрощенные подходы. Например, для медленных, существенно дозвуковых, течений, плазму приближенно можно считать несжимаемой, ρ=const , и тогда, согласно уравнению неразрывности (3.4), течение плазмы удовлетворяет условию $div\vec{v} = 0$, а давление плазмы определяется условием совместимости динамических уравнений. В условиях, когда теплообмен с окружающей средой несуществен, используется адиабатический закона вида $p \sim \rho^{\gamma}$. При этом изменение температуры следует соотношению $T \sim \rho^{\gamma-1}$. Здесь γ – показатель адиабаты, например, для модели одноатомного газа равный γ=5/3. В общем случае, напомним, $\gamma = 1 + 2/N$, где $N=1,2,3\ldots$ - число степеней свободы.

Используя приведенные уравнения магнитной гидродинамики, можно описать поведение плазмы во многих весьма сложных случаях. Несомненным преимуществом такого подхода к описанию плазмы является его сравнительная простота и наглядность. Иногда это очень важно, например, при описании динамики токовых систем. При этом, конечно, в каждом конкретном случае, используя уравнения магнитной гидродинамики плазмы, необходимо иметь в виду условия (3.3) применимости гидродинамических представлений.

§ 23. **Магнитное давление**

Весьма важные выводы общего характера могут быть получены непосредственно из анализа уравнений (3.4) и (3.5).

В пренебрежении внешними силами $\vec{F}$, движение плазмы определяется силой Ампера (иначе называемой пондеромоторной силой) и градиентом газокинетического давления

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{c}\vec{j} \times \vec{B} - \nabla p . \qquad (3.11)$$

Используя известное тождество из векторного анализа, справедливое для двух любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

$$\nabla(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{a}\nabla)\vec{b} + (\vec{b}\nabla)\vec{a} + \vec{a} \times rot\vec{b} + \vec{b} \times rot\vec{a} ,$$

и уравнение (3.6), пондеромоторную силу можно представить в виде:

$$\frac{1}{c}\vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{4\pi} rot\vec{B} \times \vec{B} = -\nabla \frac{B^2}{8\pi} + \frac{1}{4\pi}(\vec{B}\nabla)\vec{B} \equiv -\nabla \cdot \hat{p}_{маг} . \qquad (3.12)$$

где

$$\hat{p}_{маг} = \frac{B^2}{8\pi}(\hat{\delta} - 2\hat{\tau}\tau), \qquad (3.13)$$

тензор магнитного давления; $\hat{\delta}$ - единичная матрица, а $\vec{\tau} = \frac{\vec{B}}{B}$ – единичный вектор, направленный по касательной к силовой линии магнитного поля. В системе координат с осью *z*, направленной вдоль вектора $\vec{B}$, этот тензор записывается в виде следующей диагональной таблицы:

$$\hat{p}_{маг} = \begin{pmatrix} \frac{B^2}{8\pi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B^2}{8\pi} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{B^2}{8\pi} \end{pmatrix} . \qquad (3.14)$$

Знак компонент тензора магнитного давления не случаен: поперечные компоненты положительны, что соответствует расталкиванию силовых линий магнитного поля в поперечном направлении, тогда как продольная компонента этого тензора отрицательна – в продольном направлении силовые линии натянуты.

Величину

$$p_m = \frac{B^2}{8\pi} \qquad (3.15)$$

обычно называют *магнитным давлением*.

Полезно так переписать соотношение (3.12), чтобы расталкивание и натяжение силовых линий проявлялись в нем еще более явно. Для этого, пользуясь определением касательного вектора, запишем

$$(\vec{B}\nabla)\vec{B} = (B\vec{\tau}\nabla)(B\vec{\tau}) = B^2(\vec{\tau}\nabla)\vec{\tau} + B\vec{\tau}(\vec{\tau}\nabla B) .$$

Учитывая, далее, что по определению

$$(\vec{\tau}\nabla)\vec{\tau} = \frac{\vec{n}}{R},$$

где $\vec{n}$ - нормаль к силовой линии, а R - радиус ее кривизны, получим

$$\frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B}=-\nabla_{\perp}\frac{B^2}{8\pi}+\frac{B^2}{4\pi R}\vec{n}, \qquad (3.16)$$

где обозначено для краткости

$$\nabla_{\perp}=\nabla-\vec{\tau}(\vec{\tau}\nabla).$$

Первое слагаемое в (3.16) отвечает фарадеевскому "расталкиванию", а второе, связанное с искривлением магнитной силовой линии, описывает влияние натяжения магнитных силовых линий, или фарадеевское "сокращение длины". Подчеркнем, что в вакууме, то есть в области вне токов, когда $\vec{j}\equiv 0$, из (3.16) следует соотношение

$$\frac{\nabla_{\perp}B}{B}=\frac{\vec{n}}{R},$$

которое уже использовалось нами ранее при обсуждении дрейфового движения частиц плазмы в неоднородном магнитном поле. Обе формы записи (3.12) и (3.16) вполне равнозначны, и можно пользоваться любой из них.

Таким образом, пондеромоторная сила может быть представлена в виде суммы градиента магнитного давления и компоненты, обязанной своему появлению натяжению магнитных силовых линий. В однородном поле имеем $R\to\infty$, и вклад от этой компоненты обращается в нуль.

В проблеме магнитного удержания плазмы важную роль играет параметр

$$\beta=\frac{p}{p_m}=\frac{8\pi p}{B^2}, \qquad (3.17)$$

определяющий отношение газокинетического давления плазмы к магнитному давлению. В зависимости от величины этого параметра принято говорить о *плазме высокого давления*, если $\beta>1$, или о *плазме низкого давления*, если $\beta<1$. Например, в токамаках принципиально может удерживаться только плазма низкого давления, $\beta_{\max}<0.1$. В то время как в открытых ловушках в принципе возможно удержание плазмы с $\beta\sim 1$.

Отметим в заключение, что, так как магнитное давление, определенное формулой (3.15), является одновременно и плотностью магнитной энергии, то p_m измеряется в эрг/см^3, если магнитная индукция B измеряется в гауссах.

§ 24. **Равновесие плазмы в магнитной гидродинамике**

Важный круг задач, в которых с успехом применяется магнитная гидродинамика, связан со стационарными течениями плазмы, т.е. с такими, когда параметры течения явно не зависят от времени и частные производные по времени в уравнениях (3.4) – (3.10) можно опустить. Частным случаем стационарных процессов являются статические равновесия, когда скорость плазмы тождественно равна нулю. Это именно равновесия, так как из условия $\vec{v} = 0$ вытекает $d\vec{v}/dt = 0$, а, следовательно, действующие на любой элементарный объем плазмы силы должны быть уравновешены. При этом, как это видно из уравнения движения (3.5), должно быть выполнено условие:

$$\frac{1}{c}\vec{j} \times \vec{B} = \nabla p . \qquad (3.18)$$

Это условие и представляет собой *уравнение равновесия плазмы* в магнитной гидродинамике. Из него, очевидно, следует, что вектора $\vec{j}$ и $\vec{B}$ лежат на поверхностях, ортогональных к градиенту давления, то есть на поверхностях постоянного давления $p=const$. С другой стороны, если магнитной конфигурации сопоставить семейство магнитных поверхностей, на которых лежат силовые линии, то, очевидно, что именно на этих поверхностях давление плазмы должно быть постоянно. Таким образом, магнитные поверхности удерживающего плазму магнитного поля с необходимостью должны быть изобарическими для плазмы.

В простейшем случае, когда силовые линии магнитного поля являются прямолинейными и параллельными друг другу, их радиус кривизны равен бесконечности, то согласно выражению (3.16) можно записать

$$\frac{1}{c}\vec{j} \times \vec{B} = -\nabla_{\perp}\frac{B^2}{8\pi} . \qquad (3.19)$$

Выбрав направление силовых линий за ось z системы координат, для единственной отличной от нуля компоненты поля B_z из уравнения соленоидальности магнитного поля

$$div\vec{B} = 0$$

получим

$$\frac{\partial}{\partial z}B_z = 0 ,$$

и магнитная индукция может меняться только поперек направления силовых линий. Воспользовавшись представлением (3.19) для силы Ампера, из уравнения (3.18) получим

$$\nabla_{\perp}\frac{B_z^{\,2}}{8\pi} + \nabla_{\perp} p = 0 , \qquad \frac{\partial}{\partial z}p = 0 ,$$

следовательно, давление плазмы также не меняется вдоль силовых линий, а поперек силовых линий должна быть постоянна сумма давления плазмы и магнитного давления:

$$\frac{B_z^{\,2}}{8\pi} + p = const .$$

Согласно этому условию вне области, занятой плазмой, магнитное поле является однородным, пусть здесь $B_z=B_0$. Тогда постоянную можно выбрать так, что во всем пространстве будет

$$\frac{B_z^{\,2}}{8\pi} + p = \frac{B_0^{\,2}}{8\pi} . \qquad (3.20)$$

Видно, что в области, занятой плазмой, магнитное поле меньше внешнего. Можно сказать, что плазма «выталкивает» магнитное поле, как и любой другой диамагнетик.

Уравнение (3.20) для рассматриваемого частного случая устанавливает условие равновесного состояния системы “плазма – магнитное поле”, причем давление магнитного поля вне плазмы в равновесии должно быть больше магнитного давления

внутреннего поля как раз на величину газокинетического давления плазмы, что наглядно демонстрирует идею удержания плазмы магнитным полем. Подчеркнем, что в уравнениях равновесия нет каких-либо ограничений на происхождение магнитного поля, поэтому оно может быть создано как внешними токами, так и током, протекающим по плазме. Вместе с тем условие (3.20) связывает две неизвестные величины. Поэтому для однозначного решения задачи равновесия необходимо привлекать дополнительные условия, в том числе условия поддержания тока в плазме.

Примером квазистационарного процесса может служить равновесное состояние самосжимающегося длинного цилиндрического столба плазмы с продольным током - так

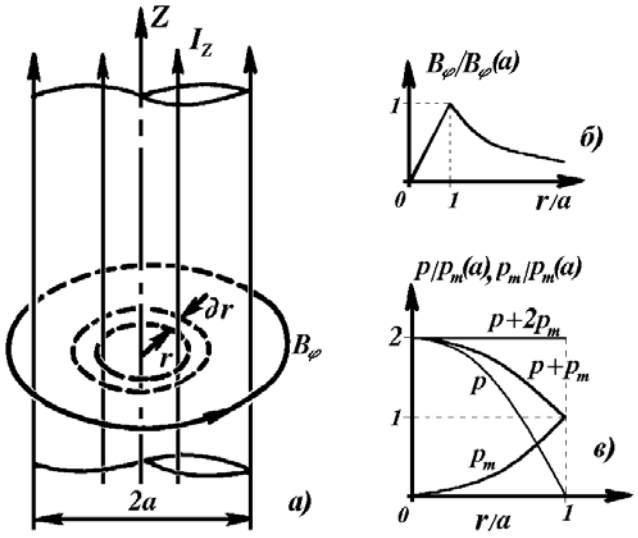


Рис.3.1. Плазменный *Z*-пинч: а – геометрия токового канала, б – распределение магнитного поля, в –давления плазмы (p) и магнитного давления (p_m) по радиусу

называемый *Z-пинч*[*]. В этом случае B и p зависят только от одной координаты - расстояния r от оси столба (рис.3.1). Уравнение равновесия примет вид:

$$-\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{1}{c}j_z B_\varphi .$$

Если считать ток пинча распределенным равномерно по его сечению, то j_z=const и $B_\varphi=\frac{2}{c}\pi r j_z$, так как по теореме о циркуляции

$$\oint B_\varphi dl_\varphi \equiv \int_0^{2\pi} B_\varphi r d\varphi \equiv B_\varphi \cdot 2\pi r=\frac{4\pi}{c}J(r)\equiv\frac{4\pi}{c}\pi r^2 j_z ,$$

где

$$J(r)=2\pi\int_0^r j_z r dr=\pi r^2 j_z$$

– ток в цилиндре с радиусом r. Для области вне пинча, вновь воспользовавшись теоремой о циркуляции, получаем:

$$\oint B_\varphi dl_\varphi \equiv \int_0^{2\pi} B_\varphi r d\varphi \equiv B_\varphi \cdot 2\pi r=\frac{4\pi}{c}I\equiv\frac{4\pi}{c}\pi a^2 j_z ,$$

[*] Разряд с геометрией *Z*-пинча возникает, например, при пропускании сильного тока через газ между двумя параллельными электродами, расположенными перпендикулярно оси *z*.

где I - полный ток пинча. Таким образом, распределение магнитного поля пинча следующее (рис. 3.1,б):

$$B_\varphi(r) = B_\varphi(a)\begin{cases}\dfrac{r}{a}, r \le a\\ \dfrac{a}{r}, r > a\end{cases},$$

где

$$B_\varphi(a) = \frac{2I}{ca}$$

магнитное поле на границе плазмы.

Отметим попутно полезную практическую формулу для расчета величины этого поля:

$$B_\varphi(a) = \frac{0.2\, I_{[A]}}{a_{[см]}}, [Гс].$$

Подстановка распределения поля в уравнение равновесия приводит к соотношению

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{2\pi}{c^2} j_z{}^2 r.$$

Интегрируем и, учитывая, что на границе столба (при $r=a$) газокинетическое давление равно нулю ($p=0$), получаем

$$p = \frac{\pi a^2}{c^2} j^2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) = \frac{I^2}{\pi a^2 c^2}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \equiv \frac{B_\varphi^2(a)}{4\pi}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right).$$

Подчеркнем, что сумма давлений магнитного поля и давления плазмы

$$p + \frac{B_\varphi^2(r)}{8\pi} = \frac{B_\varphi^2(a)}{8\pi}\left(2 - \frac{r^2}{a^2}\right) \ne const$$

теперь не является величиной постоянной (сравним с (3.20)). Очевидно, это связано с вкладом от натяжения силовых линий, которые здесь имеют форму окружностей с конечным радиусом кривизны. Постоянной теперь является величина

$$p + \frac{B_\varphi^2(r)}{8\pi} - \left(-\frac{B_\varphi^2(r)}{8\pi}\right) \equiv p + \frac{B_\varphi^2(r)}{4\pi} = \frac{B_\varphi^2(a)}{4\pi} = const.$$

Вклад натяжения силовых линий приводит к тому, что давление плазмы в центре токового канала оказывается ровно вдвое больше магнитного давления на его границе. Распределение давлений в токовом канале показано на (рис. 3.1,в).

Так как $p=2nT$, то, вводя полное число частиц на единицу длины плазменного столба N (так называемое *погонное число частиц*) и считая температуру плазмы T постоянной, определим

$$N = 2\pi \int_0^a nr\, dr = \frac{I^2}{4c^2 T},$$

откуда получаем соотношение

$$4NT = \frac{I^2}{c^2},$$

известное как *соотношение Беннета*.

При выводе этого соотношения нами предполагалось, что температура плазмы постоянна. Однако проводимость реальной плазмы не бесконечна, и поэтому протекание тока будет сопровождаться выделением джоулева тепла и нагревом плазмы. Если этот процесс считать медленным, то условие равновесия можно считать, по крайней мере, приближенно справедливым. Следовательно, если при постоянном погонном числе частиц температура будет расти, то для обеспечения равновесия необходимо увеличивать ток.

К сожалению, в обсуждаемой выше геометрии разряда практически не удается довести плазменный столб до равновесного состояния, так как ряд процессов приводит к неустойчивости, и столб плазмы быстро разрушается.

Плазменный столб в *Z*-пинче опирается на электроды, значит вдоль столба уход частиц и потери энергии в области контакта неизбежны. Естественно желание свернуть столб плазмы в тор – создать замкнутую безэлектродную систему. Однако тороидальный виток с током стремится к расширению, потому что давление магнитного поля на внутреннюю поверхность витка больше, чем на наружную. Например, на любой участок витка $\Delta_1 J$ действует отталкивающая сила от диаметрально противоположного участка витка $\Delta_2 J$ (рис.3.2), поскольку, как известно, антипараллельные токи отталкиваются. Чтобы обеспечить равновесие плазменного витка, его можно было бы поместить в вертикальное магнитное поле B_z, направленное по оси z, перпендикулярной плоскости витка (плоскости рис.3.2). Тогда силы, растягивающие виток $F_1 \sim J^2$, могут быть скомпенсированы силами, сжимающими его, $F_2 \sim JB_z$. Расчеты [10] показывают, что при этом равновесие достигается, если

$$B_z = \frac{J}{cR}\left(\ln\frac{8R}{a} - \frac{1}{2}\right),$$

где J - полный ток в плазменном витке.

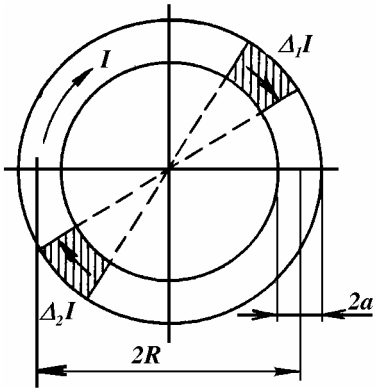


Рис.3.2. Геометрия тороидального витка плазмы

Равновесное состояние витка может быть получено также (на временах масштаба скиновых), если его поместить в хорошо проводящий металлический кожух. Смещение витка приводит к возникновению токов Фуко в кожухе, и магнитные поля этих токов играют роль поля B_z. В этом случае время существования равновесного состояния зависит от соотношения радиуса плазменного шнура a, радиуса камеры тора R, проводимости и толщины Δr проводящего кожуха.

Стабилизация положения плазменного витка с током вертикальным магнитным полем и проводящим массивным металлическим кожухом реально использовались в токамаках для обеспечения равновесия по большому радиусу тора. Равновесие по малому радиусу обеспечивается (в совокупности с полем тока) сильным тороидальным магнитным полем.

Магнитогидродинамический метод рассмотрения дает возможность качественно и наглядно представить условия равновесия плазменного шнура различной геометрии, а расчеты позволяют оценить необходимые соотношения макроскопических параметров.

§ 25. **Быстрые процессы**

В уравнении (3.18) инерцией плазмы пренебрегаем. Однако при быстрых процессах это недопустимо. Более того, опыт показал, что на первых стадиях развития импульсного разряда можно пренебречь газокинетическим давлением по сравнению с инерционным членом. При быстром процессе пробой газа происходит первоначально по периферии разрядной камеры. В формировании плазменной оболочки существенную роль играют элементарные процессы – ионизация, рекомбинация и перезарядка. На этой стадии образуется тонкий проводящий цилиндр плазмы. По мере разогрева и роста тока эта плазменная оболочка отрывается от стенки камеры, сжимается к центру, ионизует и "сгребает" при сжатии находящийся внутри нее нейтральный или слабо ионизованный газ, вовлекая его в движение к центру. Такой процесс получил название движущейся магнитной стенки (в английской литературе сложился термин *snow-plow* – снежный плуг) и теоретически был рассмотрен в СССР Леонтовичем и Осовцом [16], а в США - Розенблютом. После схождения плазменной оболочки к оси в центре камеры образуется цилиндрический плазменный «столб», сжимающийся под действием магнитного поля собственного тока и, в результате, быстро разогревающийся - по этой причине пренебречь давлением плазмы уже нельзя. По мере разогрева давление плазмы растет и тормозит процесс дальнейшего сжатия. Эта стадия завершается образованием цилиндрического токового канала, почти равновесного, но, как показали эксперименты, неустойчивого, вскоре разрушающегося, главным образом, за счет развития перетяжек, ведущих к обрыву тока, и изгибов-змеек, разрушающих токовый канал. На заключительной стадии разряда, когда токовый канал разрушается, возникают электромагнитные поля, приводящие к ускорению части частиц плазмы, всплеску рентгеновского излучения и нейтронному излучению, если разряд производится в дейтерии. Мощный импульсный разряд, в котором реализуется описанная выше (весьма фрагментарно!) совокупность событий, получил название *Z-пинч*, главным образом за счет геометрии цилиндрической разрядной камеры, ось которой принято обычно выбирать за ось *z* системы координат.

На фазе движения плазменной оболочки к оси, сопровождающемся сгребанием газа и ростом массы плазмы, радиальная координата плазменной оболочки, которая считается тонкой, согласно теории Леонтовича – Осовца [16], определяется уравнением:

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dr}{dt}\right) = \frac{1}{c}(\vec{j}\times\vec{B})_r \cdot 2\pi r \equiv -\frac{B_\varphi^2}{8\pi}\cdot 2\pi r\,, \qquad (3.21)$$

где m - масса единицы длины шнура плазмы

$$m = m_0\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right), \quad m_0 = \pi\rho a^2\,,$$

где a - начальный радиус оболочки, m_0 - начальная масса газа в разрядной камере на единицу длины вдоль оси;

$$B_\varphi = \frac{2I(t)}{cr}$$

магнитное поле тока снаружи от плазменной оболочки. Внутри оболочки при цилиндрической симметрии магнитное поле, очевидно, равно нулю. По этой причине в правой части уравнения (3.21), представляющей собой радиальную силу, действующую на оболочку в расчете на единицу ее длины вдоль оси, знак обязательно должен быть отрицательным! Иногда в левую часть (3.21) вводят дополнительный коэффициент k, учитывающий долю захватываемой массы и равный единице при полном сгребании.

Для определения величины разрядного тока $I(t)$ необходимо дополнительное уравнение - электротехническое уравнение цепи для разрядного контура. Это, конечно, усложняет решение. Но на начальной стадии можно полагать, что ток растет линейно по времени, так что

$$I(t) = \dot{I}_0 t ,$$

где $\dot{I}_0$ - темп нарастания тока (здесь постоянная величина), определяемый электротехническими параметра разрядной цепи.

Решение уравнения (3.21) для линейно нарастающего тока дано в [12]. Оно предсказывает, что в определенный момент времени

$$t = t_{особ} = 1.5\,(ac / \dot{I}_0)^{1/2} m_0^{1/4}, \qquad (3.22)$$

называемый моментом особенности, плазменная оболочка схлопывается на оси системы. Момент особенности реально наблюдается на эксперименте (но, конечно, сжатия до нулевого радиуса не происходит), причем предсказания с помощью (3.22) удивительно точно соответствуют наблюдениям (подробнее см. [12], типичные значения $t_{особ}$ составляют 2 - 10 мкс). Заметим, что величина $t_{\text{особ}}$ определяется, фактически, только начальными значениями величин.

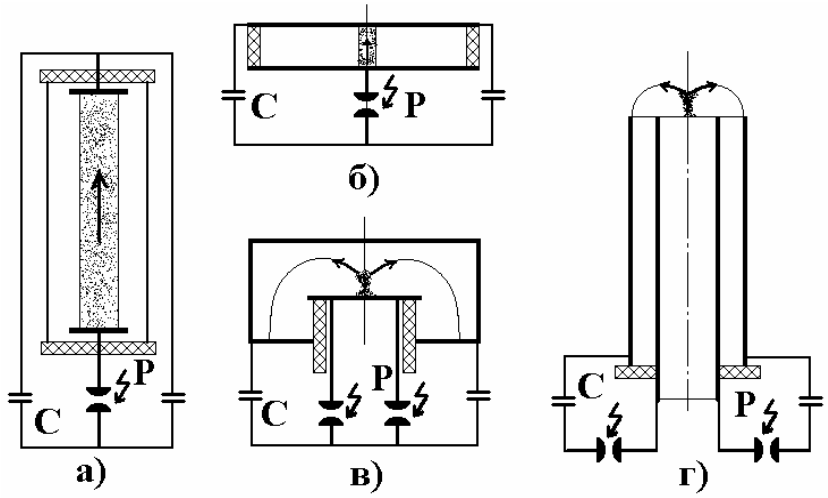


Рис. 3.3. Разновидности цилиндрического (а,б) и нецилиндрического (в,г) *Z*-пинча: а – классический *Z*-пинч, б – микропинч, в – плазменный фокус Филиппова, г – пушка Мейзера. Р –разрядник, С – батарея конденсаторов, стрелка – направление тока

В настоящее время изучено экспериментально целое семейство различных модификаций *Z*-пинча, некоторые из представителей которого схематично показаны на рис. 3.3. Многообразие модификаций разрядных устройств такого типа не случайно: по сути дела, вся история исследований в области управляемого термоядерного синтеза берет начало от мощных импульсных разрядов в газе, в которых впервые были обнаружены «термоядерные» нейтроны и которые длительное время были рекордсменами по параметру $n\tau$ - произведению концентрации плазмы на время удержания. Многие свои позиции ввиду целого ряда уникальных свойств пинчи не утратили до сих пор.

§ 26. **Взаимное проникновение плазмы и магнитного поля**

Магнитное давление действует на проводник в направлении перпендикулярном к магнитным силовым линиям, в течение времени, меньшем скинового времени $t<\tau_s$. За время, большее скинового $t>\tau_s$, магнитное поле успевает "просочиться" в проводник и величины индукции магнитного поля внутри и вне проводника выравниваются. В случае, когда рассматривается проникновение магнитного поля в плазму, нужно учитывать, что процесс проникновения взаимный – не только поле проникает в плазму, но и плазма проникает в магнитное поле, например, за счет диффузии, имеющей место и в случае, когда магнитное поле однородно.

Проникновение поля в проводник с постоянной проводимостью σ, или, что то же самое, в однородную неподвижную плазму с постоянной температурой, формально аналогично диффузии, так как описывается (приближенно) сходным уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = D_{маг}\Delta\vec{B}, \qquad (3.23)$$

с коэффициент магнитной диффузии $D_{маг}$, определяемым формулой (3.2).

Хорошо известно, что это уравнение описывает обычный скин-эффект. Глубина проникновения поля l_m растет со временем по закону

$$l_m \sim \sqrt{D_{маг}t}\,.$$

В противоположном случае, когда плазма помещена в постоянное однородное магнитное поле, ее граница постепенно размывается и это размытие границы плазмы связано с движением частиц поперек поля. А это возможно только при столкновении частиц, т.е. в процессе поперечной диффузии. Этот процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t}n = div(D_\perp \nabla n), \qquad (3.24)$$

где

$$D_\perp = \frac{<\rho_e>^2}{\tau_{ei}}. \qquad (3.25)$$

Величина размытия границы плазмы l_p за время t определяется теперь выражением:

$$l_p \sim \sqrt{D_\perp t}\,.$$

Любопытно отметить, что формально имеет место соотношение [17]

$$D_\perp = \frac{1}{2}\beta D_{маг}, \qquad (3.26)$$

и, следовательно, за тоже самое время толщина слоя проникновения плазмы низкого давления с $\beta<1$ в однородное поле оказывается в $\sqrt{\beta/2}$ раз меньше толщины слоя проникновения поля в однородную неподвижную плазму.

Важно выяснить, какой процесс является доминирующим, когда имеет место взаимная диффузия плазмы и магнитного поля, т.е. в случае, когда и плазма и поле являются неоднородными. В общем виде это сложная задача, но достаточно простое ее решение можно получить, если ограничиться случаем плазмы низкого давления. Процесс диффузии является нестационарным, но обычно его можно считать медленным на масштабах времен установления

равновесия плазмы. Иными словами, описывая диффузию, в уравнении движения (3.11) можно пренебречь инерцией, и принять, что

$$\frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B}-\nabla p\approx 0\,. \qquad (3.27)$$

Считая это условие выполненным, из закона Ома (3.8) получим величину напряженности электрического поля

$$\vec{E}=\frac{\vec{j}}{\sigma}-\frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}+\frac{1}{2n|e|}\nabla p\,. \qquad (3.28)$$

Стремясь максимально упростить описание, ограничимся случаем диффузии плазмы с постоянной температурой T=const в неоднородном магнитном поле с прямыми силовыми линиями, ориентированными вдоль оси z системы координат. Считаем, что вдоль этого направления поле и плазма однородны. В этих условиях подстановка поля $\vec{E}$ из (3.28) в закон индукции

$$rot\,\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,,$$

с последующим использованием уравнения непрерывности (3.4), которое здесь удобно записать в виде

$$\frac{1}{n}\frac{dn}{dt}=-div\,\vec{v}\,, \qquad (3.29)$$

приводит к соотношению

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{B_z}{n}\right)=D_{маг}\frac{\Delta B_z}{n}\,. \qquad (3.30)$$

Учтем далее, что (3.27) эквивалентно следующему условию

$$\frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{B}-\nabla p=-\nabla_{\perp}\left(\frac{B_z^{\,2}}{8\pi}+p\right)\approx 0\,.$$

Оно означает, что суммарное давление плазмы и магнитного поля поддерживается постоянным:

$$\frac{B_z^{\,2}}{8\pi}+p=\frac{B_0^{\,2}}{8\pi}\,, \qquad (3.31)$$

где B_0 считается заданной величиной. Заметим, что при выводе (3.29) – (3.31) явно никак не использовалась предполагаемая малость величины β, так что в этом плане они являются пока точными. Учтем эту малость, тогда, введя для удобства промежуточное обозначение,

$$\beta_0=\frac{8\pi p}{B_0^{\,2}}<<1\,,$$

из (3.30) приближенно получаем величину магнитной индукции

$$B_z\cong B_0\left(1-\frac{1}{2}\beta_0\right). \qquad (3.32)$$

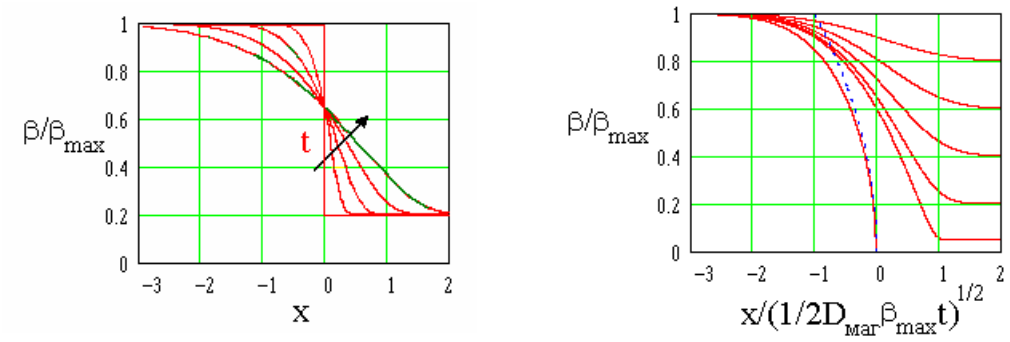
Поскольку величина β_0 здесь пропорциональна концентрации плазмы, то, используя это соотношение, можно показать (предлагаем читателю в качестве упражнения проделать этот несложный вывод самостоятельно), что уравнения (3.29), (3.30) сводятся к одному

$$\frac{\partial}{\partial t}n=div\left(\frac{1}{2}\beta_0 D_{маг}\nabla n\right), \qquad (3.33)$$

формально совпадающему с уравнением диффузии плазмы в однородном поле (3.24). Теперь, однако, в силу (3.32), магнитное поле однозначно связано с

плотностью плазмы, поэтому можно сказать, что оно «автоматически подстраивается» под медленно меняющуюся за счет диффузии плотность плазмы.

Уравнение (3.33) является нелинейным, его решение - непростая задача. Для иллюстрации взаимного проникновения плазмы и магнитного поля рассмотрим частный случай



а) б)

Рис. 3.4. Диффузионное расплывание скачка плотности плазмы:
а – автомодельные профили для нескольких значений величины скачка (пунктир - $|\xi|^{1/2}$); б – эволюция скачка плотности с ростом времени

диффузионного расплывания заданного одномерного скачка плотности плазмы. Упрощение достигается здесь за счет того, что все точки профиля плотности движутся по подобным траекториям, по закону диффузии должно быть $x \sim \sqrt{t}$, и можно ввести, как говорят, *автомодельную переменную*,

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{2} D_{маг} \beta_{max} t}}, \qquad (3.34)$$

где β_{max} - нормировка, такая что

$$\beta(x,t) = f(\xi)\beta_{max}. \qquad (3.35)$$

Профиль $f(\xi)$, как следует из (3.33), удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{d\xi}\left(f \frac{df}{d\xi}\right) + \frac{\xi}{2}\frac{df}{d\xi} = 0,$$

решения которого для нескольких значений величины скачка плотности приведены на рис. 3.4.

Произвольный скачок плотности постепенно размывается с течением времени (рис. 3.4,б). Заметим, что скачок размывается в обе стороны от его начального положения, только если плотность плазмы первоначально была не нулевой по обе стороны от него. Если же плотность плазмы тождественно равна нулю с одной стороны от скачка (например, справа, как показано на рис. 3.4,а), то проникновение плазмы в эту область оказывается невозможным. Это неудивительно, так как при нулевой плотности плазмы коэффициент поперечной диффузии тождественно обращается в нуль и, в рамках применимости уравнения (3.33), диффузия оказывается невозможной. В этих условиях предположения, заложенные при выводе (3.33), очевидно, должны быть уточнены.

ГЛАВА 4

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ. НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ

Это очень интересный, но весьма сложный раздел физики плазмы. Плазма имеет много степеней свободы, ее свойства сильно меняются при наложении магнитного поля (возникает сильная анизотропия). По этой причине спектр возможных в ней колебаний и волн является весьма широким. Мы рассмотрим лишь некоторые, наиболее характерные примеры для изотропной (незамагниченной) плазмы и распространение простейших типов волн в замагниченной плазме. Более подробное изложение можно найти, например, в [18,19]. Обычно классификация типов волн начинается с разделения их на продольные и поперечные волны. Для механических волн продольность или поперечность волны связывают с характером движения в ней частиц – вдоль или поперек направления распространения волны. Например, звуковые волны, с помощью которых лектор доводит до своих слушателей информацию об обсуждаемом предмете, являются продольными - сгущения и разрежения газа, по сути дела и представляющие собой звуковую волну, происходят в направлении ее распространения. Для электромагнитной волны ее продольность или поперечность определяется взаимной ориентацией вектора распространения волны (волнового вектора) и вектора электрического поля волны. Если волновой вектор и вектор электрического поля волны коллинеарные, то такая волна является продольной. Если же плоскость колебаний вектора электрического поля перпендикулярна направлению распространения волны, то такая волна является поперечной. Примером строго поперечной волны может служить электромагнитная волна - свет - в вакууме. Для поперечных волн в поперечной по отношению к направлению распространения волны плоскости, очевидно, можно ввести два независимых взаимно перпендикулярных направления. Соответственно, говорят о двух независимых поляризациях волны. В плазме, независимо от наличия или отсутствия внешнего магнитного поля, возможно распространение и продольных и поперечных волн, причем при наличии внешнего магнитного поля возможно распространение и продольных и поперечных волн как вдоль, так и поперек этого магнитного поля. В связи с этим важно не путать характер волны – продольная она или поперечная – и характер ее распространения: вдоль или поперек магнитного поля, в которое помещена плазма.

С возникновением и раскачкой колебаний и волн в плазме непосредственно связаны многие неустойчивости плазмы, которые будут обсуждаться в заключительном разделе этой главы.

§ 27. Дисперсионные уравнения для продольных и поперечных волн малой амплитуды

Напомним кратко основные сведения из физики волновых процессов. Основным соотношением, определяющим условия распространения волны в данной среде, является закон дисперсии, устанавливающий связь частоты колебаний и волнового вектора:

$$\omega = \omega(\vec{k})\,. \tag{4.1}$$

Закон дисперсии позволяет определить фазовую скорость волны

$$\vec{v}_{\phi} = \frac{\omega(\vec{k})}{k}\cdot\frac{\vec{k}}{k}, \tag{4.2}$$

и ее групповую скорость

$$\vec{v}_{гр} = \frac{\partial\omega(\vec{k})}{\partial\vec{k}}\,. \tag{4.3}$$

Групповая скорость волны определяет перенос волновой энергии и поэтому никогда не может превышать скорость света в вакууме

$$v_{гр} < c\ .$$

Фазовая скорость – скорость перемещения в волне точек с постоянной фазой – не связана с переносом волной энергии, а потому не ограничена величиной скорости света. В принципе, она может быть любой по величине, в том числе и больше скорости света, если это позволяет закон дисперсии. Дисперсионные свойства данной среды, если ограничиться областью волн малой амплитуды, можно установить, рассматривая отклик среды на малое воздействие. Для волн конечной амплитуды ситуация сложнее: такие волны изменяют свойства среды, в которой распространяются. Упрощенно это можно трактовать как появление зависимости частоты колебаний от амплитуды волны *a*:

$$\omega = \omega(\vec{k}, a)\ . \qquad (4.4)$$

Такова ситуация для слабо нелинейных волн, например, ленгмюровских солитонов [17].

Ограничимся здесь рассмотрением волн малой амплитуды. Универсальный подход, справедливый для волн любой природы, заключается в следующем. Электромагнитное поле волны $\tilde{\vec{E}}, \tilde{\vec{B}}$ следует определять из уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} rot\,\tilde{\vec{E}} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \tilde{\vec{B}}}{\partial t}, \\ rot\,\tilde{\vec{B}} &= \frac{4\pi}{c}\tilde{\vec{j}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \tilde{\vec{E}}}{\partial t}, \\ div\,\tilde{\vec{E}} &= 4\pi\tilde{\rho}_q, \\ div\,\tilde{\vec{B}} &= 0\ . \end{aligned} \qquad (4.5)$$

Здесь $\tilde{\rho}_q, \tilde{\vec{j}}$ – наведенная в среде полем волны плотность электрического заряда и плотность тока. Эти величины не являются полностью независимыми, а, как это следует из (4.5), связаны соотношением

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_q}{\partial t} = -div\,\tilde{\vec{j}}\ , \qquad (4.6)$$

выражающем собой закон сохранения заряда. В этом нетрудно убедиться, применив операцию дивергенции ко второму уравнению системы (4.5). Поскольку коэффициенты уравнений (4.5), (4.6) явно не содержат координат и времени, можно искать решение в виде гармонической волны $\sim exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r})$. Так как производные по времени и координатам от гармонической волны такого вида сводятся к алгебраическому домножению на $(-i\omega)$ и $(i\vec{k})$ соответственно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}) &= (-i\omega)\, exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}), \\ \frac{\partial}{\partial \vec{r}} exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}) &= (i\vec{k})\, exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}), \end{aligned}$$

то уравнения (4.5) при такой подстановке превращаются в алгебраические:

$$\begin{aligned} \vec{k} \times \tilde{\vec{E}} &= \frac{\omega}{c}\tilde{\vec{B}}, \\ i\vec{k} \times \tilde{\vec{B}} &= \frac{4\pi}{c}\tilde{\vec{j}} - \frac{i\omega}{c}\tilde{\vec{E}}, \\ i\vec{k}\,\tilde{\vec{E}} &= 4\pi\tilde{\rho}_q, \\ \vec{k}\,\tilde{\vec{B}} &= 0\ . \end{aligned} \qquad (4.7)$$

Первое из этих соотношений выражает магнитное поле волны через электрическое

$$\tilde{\vec{B}} = \frac{c}{\omega}\vec{k}\times\tilde{\vec{E}},$$

и при таком определении, очевидно, последнее из соотношений (4.7) становится тождеством. Таким образом, соотношения (4.7) сводятся к следующим:

$$i\frac{c}{\omega}\vec{k}\times(\vec{k}\times\tilde{\vec{E}}) = \frac{4\pi}{c}\tilde{\vec{j}} - \frac{i\omega}{c}\tilde{\vec{E}}, \qquad (4.8)$$

$$i\vec{k}\tilde{\vec{E}} = 4\pi\tilde{\rho}_q .$$

До сих пор мы не высказывали никаких предположений о связи наведенной волной в среде плотности тока (или заряда) и ее электромагнитного поля. Как это принято, для волн малой амплитуды эта связь предполагается линейной:

$$\vec{j} = \hat{\sigma}(\omega,\vec{k})\vec{E}, \qquad (4.9)$$

а набор соответствующих коэффициентов пропорциональности составляет *тензор проводимости* $\hat{\sigma}$, зависящий от свойств рассматриваемой среды, а также, вообще говоря, от частоты волны и волнового вектора. По определению этот тензор связан с *тензором диэлектрической проницаемости* $\hat{\varepsilon}(\omega,\vec{k})$ среды соотношением:

$$\hat{\varepsilon}(\omega,\vec{k}) = \hat{\delta} + \frac{4\pi i}{\omega}\hat{\sigma}(\omega,\vec{k}), \qquad (4.10)$$

где первое слагаемое – единичная диагональная матрица. Поскольку, в силу (4.6), наведенная плотность заряда должна быть связана с наведенной плотностью тока соотношением

$$\omega\tilde{\rho}_q = \vec{k}\tilde{\vec{j}},$$

то второе из соотношений (4.8) фактически является следствием первого. По этой причине, с учетом определения тензора диэлектрической проницаемости, после простых преобразований приходим к однородной алгебраической задаче:

$$(\frac{\varepsilon_{ij}}{N^2} - \delta_{ij} + \frac{k_i k_j}{k^2})E_j = 0, \qquad (4.11)$$

где величина

$$N^2 = \left|\frac{kc}{\omega}\right|^2 \qquad (4.12)$$

представляет собой квадрат показателя преломления волны. Однородная задача (4.11), как известно, имеет ненулевое решение не всегда, а только при выполнении дополнительного условия. А именно, детерминант входящей в (4.11) матрицы должен быть равен нулю:

$$Det(\frac{\varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k})}{N^2} - \delta_{ij} + \frac{k_i k_j}{k^2}) = 0. \qquad (4.13)$$

Это условие и представляет собой *дисперсионное уравнение*, определяющее закон дисперсии (4.1) волн, способных существовать в данной среде. Если дисперсионное уравнение имеет несколько решений, то о них говорят как о *ветвях* или о *модах собственных колебаний.*

Если среда, в которой рассматривается распространение волны, изотропна, так что единственным выделенным направлением является направление распространения самой волны, то среди всех компонент тензора диэлектрической проницаемости отличны от нуля лишь две компоненты – продольная ε_l и поперечная ε_{tr} по отношению к направлению распространения волны (здесь индексы *l* и *tr* – начальные буквы английских терминов longitudinal – продольный и transversal - поперечный). В этом случае этот тензор оказывается следующим:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{tr}(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}) + \varepsilon_l \frac{k_i k_j}{k^2}, \qquad (4.14)$$

а дисперсионное уравнение, как легко проверить, приводится к виду:

$$Det\left(\frac{\varepsilon_{ij}(\omega,\vec{k})}{N^2}-\delta_{ij}+\frac{k_i k_j}{k^2}\right)=\frac{\varepsilon_l}{N^2}\left(\frac{\varepsilon_{tr}}{N^2}-1\right)^2=0.$$

Таким образом, как мы видим, существуют две возможности выполнить это условие:

$$\varepsilon_l = 0, \tag{4.15}$$

$$\varepsilon_{tr} = N^2. \tag{4.16}$$

Первая из них отвечает продольным волнам, а вторая – поперечным. Полезно отметить, что если пространственная дисперсия (т.е. зависимость компонент тензора диэлектрической проницаемости от волнового вектора) несущественна, то продольная и поперечная компоненты совпадают

$$\varepsilon_l = \varepsilon_{tr} \equiv \varepsilon,$$

и можно говорить лишь об одной величине ε - диэлектрической проницаемости среды. Она и определяет дисперсионные уравнения для продольных

$$\varepsilon = 0, \tag{4.17}$$

и поперечных волн

$$\varepsilon = N^2. \tag{4.18}$$

Например, в вакууме, когда, очевидно, проводимость равна нулю, получаем из (4.10)

$$\varepsilon_{вак} = 1,$$

поэтому, согласно (4.17), продольные волны невозможны, а закон дисперсии поперечных волн, как это следует из (4.18) и (4.12), оказывается следующим

$$\omega = kc.$$

Напомним, что поперечные волны могут иметь два независимых направления поляризации.

Подчеркнем в заключение, что если плазма анизотропна, например, помещена в магнитное поле, или в ней распространяется пучок частиц, так что существует явно выделенное направление, то представление (4.14) для тензора диэлектрической проницаемости не справедливо, но закон дисперсии для продольных (или, точнее, «почти» продольных, подробнее см. [20]) волн по-прежнему определяется уравнением (4.15), если под «продольной» диэлектрической проницаемостью понимать величину

$$\varepsilon_l \equiv \frac{k_i k_j}{k^2}\varepsilon_{ij}.$$

§ 28. Метод малых колебаний. Диэлектрическая проницаемость незамагниченной плазмы

Как следует из изложенного в предыдущем параграфе, все свойства волн, способных распространяться в данной среде, в том числе и в плазме, определяются ее диэлектрической проницаемостью. Поэтому наша ближайшая цель – установить и исследовать диэлектрические свойства плазмы. Прежде чем перейти к рассмотрению конкретных плазменных волн напомним два результата, которые мы уже обсуждали ранее. Во-первых, диэлектрическая проницаемость холодной плазмы должна определяться соотношением (см. § 11):

$$\varepsilon = 1 - \left(\omega_p / \omega\right)^2, \qquad \omega_p^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 \tag{4.19}$$

где ω – частота колебаний, а ω_p – ленгмюровская (или плазменная) частота. Возникает вопрос, какую плазму можно назвать холодной? Для ответа на этот вопрос, очевидно, надо сопоставить характерные скорости движения частиц плазмы и фазовые скорости плазменных волн. Для равновесной плазмы характерная скорость движения частиц (в отсутствие волны!) – это тепловая скорость (большая для электронов плазмы), поэтому, изучая условия распространения волн, плазму можно считать холодной при выполнении условия:

$$v_\phi \equiv \frac{\omega}{k} >> v_{T_e}, v_{T_i}. \tag{4.20}$$

Поскольку это условие ограничивает частоту волн снизу, то оно отвечает высокочастотному пределу, а, следовательно, формула (4.19) определяет диэлектрическую проницаемость плазмы *в высокочастотном пределе*. Во-вторых, напомним, что при обсуждении дебаевской длины экранирования (см. §3 и §11) было получено уравнение экранировки

$$\Delta\varphi = \frac{\varphi}{r_D^2}, \tag{4.21}$$

где r_D - радиус Дебая для плазмы. Экранировка здесь рассматривается как статический процесс, поэтому уравнение (4.21) отражает диэлектрические свойства плазмы в статическом пределе. Полагая в (4.21)

$$\varphi \sim e^{i\vec{k}\vec{r}},$$

приходим к следующему результату:

$$\varepsilon = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2}, \qquad \frac{1}{r_D^2} \equiv \frac{1}{r_{De}^2} + \frac{1}{r_{Di}^2}, \tag{4.22}$$

определяющему диэлектрическую проницаемость плазмы *в статическом пределе*, справедливом при выполнении условия, обратного по отношению к (4.19):

$$v_\phi \equiv \frac{\omega}{k} << v_{T_i}, v_{T_e}. \tag{4.23}$$

Подчеркнем, что в обоих предельных случаях структура ε оказывается следующей:

$$\varepsilon = 1 + \delta\varepsilon_e + \delta\varepsilon_i.$$

Первое слагаемое здесь – единица – вклад вакуума, а остальные два отвечают вкладу электронов и ионов соответственно. Вклад различных компонент оказывается аддитивным вследствие отсутствия взаимодействия между ними.

Чтобы составить более полную картину диэлектрических свойств незамагниченной плазмы, воспользуемся методом малых колебаний. Для упрощения, и здесь следует сразу оговориться, будем пренебрегать эффектами резонансных с волной частиц. Резонансные эффекты играют принципиальную роль во многих плазменных явлениях - например, в механизме бесстолкновительного затухания Ландау, но их учет требует усложнения описания плазмы, поэтому пока их не будем затрагивать.

Суть метода малых колебаний заключается в следующем. При воздействии на первоначально невозмущенную плазму волны малой амплитуды логично ожидать появления малого отклика, поэтому можно воспользоваться разложением величины этого отклика по амплитуде волны, пренебрегая нелинейными эффектами. Кроме того, без учета резонансных эффектов, движение частиц плазмы, индуцируемое волной, можно рассматривать с помощью гидродинамических уравнений, записав для каждого сорта частиц уравнения движения и уравнения сохранения вещества.

Рассмотрим простейший пример: идеальную холодную плазму без пучков. Это значит, что мы пренебрежем тепловой скоростью частиц по сравнению со скоростью, приобретаемой ими в самосогласованых полях. Этот простой пример является удобной отправной точкой для более сложных ситуаций. В невозмущенном равновесном состоянии полагаем, что плотность плазмы однородная $n_{oe}=Zn_{oi}=n_o=$const, нет внешнего электрического поля $E_o=0$ и потоков частиц $\vec{v}_{oe}=\vec{v}_{oi}=0$. Под воздействием поля волны частицы плазмы придут в движение, получив ускорение, определяемое уравнениями движения:

$$m_e n_{0e}\frac{\partial \tilde{\vec{v}}_e}{\partial t}=-|e|n_{0e}\tilde{\vec{E}}\,, \qquad (4.24)$$

$$m_i n_{0i}\frac{\partial \tilde{\vec{v}}_i}{\partial t}=Z|e|n_{0i}\tilde{\vec{E}}\,.$$

При записи (4.24) учли, что поле имеет малую амплитуду, поэтому все нелинейные слагаемые опущены. По этой же причине в правых частях фигурирует лишь действующая на частицы сила, обусловленная электрическим полем волны. Действуя по рецепту, предложенному в предыдущем параграфе, считаем поле волны и скорости гармоническими,

$$\tilde{\vec{E}},\tilde{\vec{v}}_{e,i}\sim e^{-i\omega t+i\vec{k}\vec{r}}\,.$$

Далее, с помощью (4.24) вычисляем скорости электронов и ионов, а затем и плотность тока, индуцируемого волной. Результат оказывается следующим:

$$\tilde{\vec{j}}\equiv|e|(Z^2n_{0i}\tilde{\vec{v}}_i-n_{0e}\tilde{\vec{v}}_e)=\frac{i}{\omega}\left(\frac{e^2n_{0e}}{m_e}+\frac{Z^2e^2n_{0i}}{m_i}\right)\tilde{\vec{E}}\,.$$

Коэффициент пропорциональности между плотностью тока и напряженностью поля волны дает величину проводимости плазмы, которая в рассматриваемом пределе оказывается равной

$$\sigma=\frac{i}{\omega}\left(\frac{e^2n_{0e}}{m_e}+\frac{Z^2e^2n_{0i}}{m_i}\right). \qquad (4.25)$$

Вклад в проводимость дают обе компоненты плазмы, но, естественно, не в равной мере. Обычно электронный вклад является доминирующим. Воспользовавшись теперь определением (4.10), можно вычислить диэлектрическую проницаемость, которая, как нетрудно проверить, совпадет с приведенной выше величиной (4.19).

Усложним модель плазмы, вводя в рассмотрение возможность передачи импульса в столкновениях между ионами и электронами. Учет этого эффекта приводит к появлению в уравнениях движения дополнительных слагаемых, происхождение которых – взаимное трение компонент плазмы:

$$m_e n_{0e}\frac{\partial \tilde{\vec{v}}_e}{\partial t}=-|e|n_{0e}\tilde{\vec{E}}-n_{0e}m_e\frac{\tilde{\vec{v}}_e-\tilde{\vec{v}}_i}{\tau_{ei}}\,, \qquad (4.26)$$

$$m_i n_{0i}\frac{\partial \tilde{\vec{v}}_i}{\partial t}=Z|e|n_{0i}\tilde{\vec{E}}+n_{0e}m_e\frac{\tilde{\vec{v}}_e-\tilde{\vec{v}}_i}{\tau_{ei}}\,.$$

Вычисление скоростей компонент плазмы теперь несколько усложняется, но его можно упростить, если учесть следующее обстоятельство. Заметим, что любой выделенный единичный объем плазмы в нашей модели является нейтральным по заряду. Поэтому действующие на него электрические силы компенсируют друг друга. Кроме того, передача импульса между ионами и электронами не меняет в целом импульса выделенного объема плазмы! Поэтому, если импульс этого единичного объема первоначально был нулевым, то он остается таковым и в дальнейшем:

$$m_e n_{0e} \tilde{\vec{v}}_e + m_i n_{0i} \tilde{\vec{v}}_i = 0 .$$

Это соотношение позволяет выразить одну скорость через другую, например ионную скорость через электронную скорость:

$$\tilde{\vec{v}}_i = -\frac{m_e n_{0e}}{m_i n_{0i}} \tilde{\vec{v}}_e = -\frac{Z m_e}{m_i} \tilde{\vec{v}}_e .$$

Уравнения (4.26) в результате сводятся к одному, например, уравнение движения электронов будет следующим:

$$m_e n_{0e} \frac{\partial \tilde{\vec{v}}_e}{\partial t} = -|e| n_{0e} \tilde{\vec{E}} - n_{0e} m_e \frac{1 + Z m_e / m_i}{\tau_{ei}} \tilde{\vec{v}}_e ,$$

и теперь уже несложно вычислить скорости и с их помощью плотность электрического тока. Для гармонической волны она оказывается равной:

$$\tilde{\vec{j}} = \sigma \tilde{\vec{E}}, \qquad \sigma = \frac{i(1 + Z m_e / m_i)}{\omega + i \nu_{ei}(1 + Z m_e / m_i)} \frac{e^2 n_0}{m_e} , \tag{4.27}$$

и вновь пропорциональной полю волны. Здесь $\nu_{ei} = \tau_{ei}^{-1}$ – частота электрон-ионных столкновений, σ – проводимость плазмы. Для диэлектрической проницаемости получаем:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega[\omega + i \nu_{ei}(1 + Z m_e / m_i)]} . \tag{4.28}$$

Как мы видим, она становится величиной комплексной. Это является следствием того, что столкновения приводят к затуханию колебаний, то есть к диссипации энергии. Заметим, что в (4.28) теперь уже нельзя выделить отдельно вклад ионов и электронов - аддитивность вкладов нарушается из-за взаимодействия компонент плазмы. Подчеркнем еще одно важное обстоятельство. Использованные в (4.26) выражения для плотности сил взаимного трения между электронами и ионами

$$f_{ei} = -n_{0e} m_e \frac{\tilde{\vec{v}}_e - \tilde{\vec{v}}_i}{\tau_{ei}} ,$$

или между ионами и электронами

$$f_{ie} = n_{0e} m_e \frac{\tilde{\vec{v}}_e - \tilde{\vec{v}}_i}{\tau_{ei}} ,$$

отличаются по знаку – так и должно быть для сохранения импульса в целом в ион-электронной системе, но, на первый взгляд, несимметричны при «буквенной» перестановке масс, зарядов и концентраций частиц. В действительности, необходимая симметрия имеет место. Достаточно вспомнить, что, как это было показано в § 9, эти параметры должны входить в выражение для времени между столкновениями ионов и электронов следующим образом:

$$\tau_{ei} \sim \frac{m_e / \mu_{ei}}{e_e^2 e_i^2 n_{0i}}, \quad \mu_{ei} = \frac{m_e m_i}{m_e + m_i} .$$

Теперь, после подстановки в выражения для плотностей сил трения, требуемая симметрия становится очевидной.

В уравнениях (4.24), (4.26) мы пренебрегли эффектами, связанными с конечностью температуры плазмы, что справедливо в высокочастотной области, когда выполнено условие (4.20). Чтобы продвинуться в область меньших частот, когда фазовая скорость волны оказывается одного порядка с тепловыми скоростями частиц, необходимо усложнить модель плазмы, включая эффекты конечного давления, что мы и собираемся теперь сделать. Вместе с тем для упрощения будем пренебрегать столкновениями ионов и электронов. Это возможно, если температура достаточно велика. Напомним, что частота ион-электронных столкновений быстро убывает с ростом температуры:

$$\nu_{ei} \sim T_e^{-3/2} .$$

Если температура плазмы конечная, то в правые части уравнений движения (4.24) необходимо добавить слагаемые с градиентом давления. Пусть температура компонент плазмы постоянная, тогда градиент давления определяется градиентом возмущения плотности:

$$\nabla \tilde{p}_{e,i} = T_{e,i} \nabla \tilde{n}_{e,i} ,$$

следовательно, уравнения движения необходимо дополнить уравнениями, определяющими возмущение плотности плазмы. Если число частиц плазмы сохраняется, то необходимые нам дополнительные соотношения дают уравнения непрерывности. Для малых возмущений на фоне однородной плазмы это уравнения вида:

$$\frac{\partial \tilde{n}_{e,i}}{\partial t} = -div(n_{0e,i}\tilde{\vec{v}}_{e,i}).$$

Кроме модели плазмы с постоянной температурой, часто используется модель политропы, в которой давление и температура плазмы предполагаются степенными функциями плотности:

$$p_{e,i} = n_{e,i}T_{e,i} \sim n_{e,i}^{\gamma_{e,i}},$$

где $\gamma_{e,i} = const$ соответствующий показатель политропы. Для этого случая градиент давления для малых возмущений будет равен

$$\nabla \tilde{p}_{e,i} = \gamma_{e,i}T_{e,i}\nabla \tilde{n}_{e,i}.$$

Объединяя вместе все выше сказанное, приходим к следующей модели для «теплой плазмы»:

$$m_\alpha n_{0\alpha}\frac{\partial \tilde{\vec{v}}_\alpha}{\partial t} = e_\alpha n_{0\alpha}\tilde{\vec{E}} - \gamma_\alpha T_{0\alpha}\nabla \tilde{n}_\alpha, \qquad (4.29)$$

$$\frac{\partial \tilde{n}_\alpha}{\partial t} = -div(n_{0\alpha}\tilde{\vec{v}}_\alpha).$$

Здесь индекс $\alpha = e,i$ обозначает «сорт» частиц плазмы – ион или электрон. Так, например, $e_e = -|e|$ – заряд электрона, а $e_i = Z|e|$ – заряд иона. Вновь предполагая волны гармоническими, вычисляем возмущение плотности и скорости компонент плазмы:

$$\tilde{n}_\alpha = n_{0\alpha}\frac{\vec{k}\tilde{\vec{v}}_\alpha}{\omega} = \frac{ie_\alpha}{m_\alpha}\frac{\vec{k}\tilde{\vec{E}}}{\omega^2 - k^2c_{s\alpha}^2},$$

$$\tilde{\vec{v}}_\alpha = \frac{ie_\alpha}{\omega m_\alpha}\frac{\omega^2\tilde{\vec{E}} - k^2c_{s\alpha}^2(\tilde{\vec{E}} - \frac{\vec{k}}{k}(\frac{\vec{k}}{k}\tilde{\vec{E}}))}{\omega^2 - k^2c_{s\alpha}^2}; \quad c_{s\alpha}^2 \equiv \gamma_\alpha\frac{T_{0\alpha}}{m_\alpha},$$

где, по аналогии с газом, для краткости введено обозначение $c_{s\alpha}$ для «скорости звука» соответствующей компоненты плазмы. Умножив найденные скорости компонент плазмы на заряд и невозмущенную плотность, просуммировав затем результат по сортам частиц, вычисляем плотность электрического тока:

$$\tilde{\vec{j}} = \sum_{\alpha=e,i} e_\alpha n_{0\alpha}\tilde{\vec{v}}_\alpha = \frac{i}{\omega}\sum_{\alpha=e,i}\frac{n_{0\alpha}e_\alpha^2}{m_\alpha}\frac{\omega^2\tilde{\vec{E}} - k^2c_{s\alpha}^2(\tilde{\vec{E}} - \frac{\vec{k}}{k}(\frac{\vec{k}}{k}\tilde{\vec{E}}))}{\omega^2 - k^2c_{s\alpha}^2}.$$

Воспользовавшись, далее, определениями (4.9), (4.10) получаем тензор проводимости:

$$\sigma_{p,q}(\vec{k},\omega) = \frac{i}{\omega}\sum_{\alpha=e,i}\frac{n_{0\alpha}e_\alpha^2}{m_\alpha}(\delta_{p,q} - \frac{k_pk_q}{k^2} + \frac{\omega^2}{\omega^2 - k^2c_{s\alpha}^2}\frac{k_pk_q}{k^2}), \qquad (4.30)$$

а затем и тензор диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_{p,q}(\vec{k},\omega) \equiv \delta_{p,q} + \frac{4\pi i}{\omega}\sigma_{p,q}(\vec{k},\omega) = (1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2})(\delta_{p,q} - \frac{k_pk_q}{k^2}) + (1 - \sum_{\alpha=e,i}\frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - k^2c_{s\alpha}^2})\frac{k_pk_q}{k^2}. \qquad (4.31)$$

В формулах (4.30), (4.31) индексы *p, q* нумеруют компоненты тензоров. Поскольку обсуждаемая нами сейчас модель плазмы в отсутствие волны является изотропной – нет никакого выделенного направления, то структура тензора диэлектрической проницаемости совпадает с предсказываемой формулой (4.14). Из сопоставления с этой формулой получаем продольную

$$\varepsilon_l = 1 - \sum_{\alpha=e,i} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - k^2 c_{s\alpha}^2} \tag{4.32}$$

и поперечную

$$\varepsilon_{tr} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \tag{4.33}$$

диэлектрическую проницаемость. Они разные, поскольку учет теплового движения частиц плазмы приводит к появлению явной зависимости диэлектрической проницаемости от волнового числа. Сравнив (4.32), (4.33) с формулой (4.19) для холодной плазмы, мы видим, что изменение претерпевает только продольная диэлектрическая проницаемость, поперечная остается неизменной! Это связано с тем, что поперечная гармоническая волна малой амплитуды не изменяет плотности плазмы, следовательно, не появляется градиент давления, и конечность температуры несущественна.

В статическом пределе, то есть в пределе $\omega \to 0$, продольная проницаемость оказывается равной

$$\varepsilon_l\Big|_{\omega\to 0} = 1 + \sum_{\alpha=e,i} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2 c_{s\alpha}^2} \equiv 1 + \sum_{\alpha=e,i} \frac{4\pi n_{0\alpha} e_\alpha^2}{k^2 \gamma_\alpha T_\alpha} \equiv 1 + \frac{1}{k^2}\left(\frac{1}{\gamma_e r_{De}^2} + \frac{1}{\gamma_i r_{Di}^2}\right), \tag{4.34}$$

что совпадает с (4.22), если принять $\gamma_e = \gamma_i = 1$, то есть считать компоненты плазмы изотермическими.

Подчеркнем, что, строго говоря, учет теплового движения частиц плазмы требует кинетического описания. Поэтому приведенные результаты дают качественно правильную, но упрощенную картину диэлектрических свойств плазмы. Можно добиться лучшего согласия с точными результатами, если входящие в приведенные формулы показатели γ_e, γ_i рассматривать в качестве «подгоночных параметров», отбирая их в зависимости от конкретной решаемой задачи. Например, в случае, когда тепловые поправки можно считать малыми, но конечными, из формулы (4.32) приближенно получаем:

$$\varepsilon_l \approx 1 - \sum_{\alpha=e,i} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{k^2}{\omega^2}\frac{\gamma_\alpha T_\alpha}{m_\alpha}\right), \tag{4.35}$$

что совпадает с результатом кинетической теории [18] при выборе $\gamma_\alpha = 3$.

§ 29. Поперечные электромагнитные волны в незамагниченной плазме

Вооружившись полученными в предыдущем параграфе результатами, рассмотрим процесс распространения электромагнитных волн в плазме. Как мы уже знаем (см. § 27) задача сводится к решению дисперсионных уравнений

$$\varepsilon_l = 0\,,$$

или

$$\varepsilon_{tr} = N^2$$

в зависимости от того, какой конкретно тип волны нас интересует: чисто продольные или чисто поперечные волны. Последний случай особенно прост. С него и начнем обсуждение плазменных волн.

Поскольку для поперечных волн диэлектрическую проницаемость плазмы определяет соотношение (4.33), то дисперсионное уравнение будет таким:

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = N^2 \equiv \frac{k^2 c^2}{\omega^2}\,.$$

Решением этого уравнения, очевидно, является

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2}\,. \qquad (4.36)$$

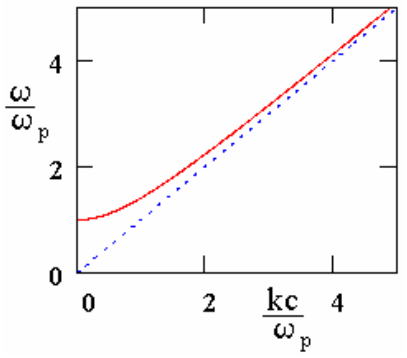


Рис. 4.1. Закон дисперсии поперечной волны в плазме. Пунктир - $\omega = kc$

Это соотношение и определяет закон дисперсии поперечной волны в плазме (рис. 4.1). Обратим внимание, что для коротких волн, когда $k \to \infty$, получаем $\omega \to kc$, так что в этом пределе волна (4.36) становится обычной световой волной. Для длинных волн, когда $k \to 0$, приближенно

$$\omega \approx \omega_p \left(1 + \frac{c^2 k^2}{2\omega_p^2}\right).$$

Заметим также, что для фазовой скорости волны закон дисперсии (4.36) дает значение

$$v_\phi = c\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{k^2 c^2}} > c\,,$$

больше скорости света. Поэтому для таких волн несущественны резонансные эффекты. Просто потому, что их фазовая скорость заведомо превышает скорости частиц плазмы, всегда меньших скорости света. Подчеркнем, что групповая скорость поперечной волны, отвечающая за перенос волновой энергии,

$$v_{гр} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{c}{\sqrt{1 + \dfrac{\omega_0^2}{k^2 c^2}}} < c\,,$$

оказывается, как это и должно быть, меньше скорости света в вакууме.

§ 30. Явление отсечки низкочастотной поперечной волны

Как мы видим из формулы (4.36), частота поперечной волны в плазме всегда больше плазменной частоты, поэтому поперечные волны, частота которых меньше плазменной частоты, не могут в ней распространяться. Это означает, что падающая из вакуума на границу плазмы поперечная волна с малой частотой должна отражаться. Имеет место, как говорят *явление отсечки* волны (в английской литературе - cut off). Критическая частота – частота отсечки,

$$\omega_{кр} = \omega_p \equiv \sqrt{\frac{4\pi n_0 e^2}{m_e} + \frac{Zm_e}{m_i}}, \tag{4.37}$$

зависит от концентрации плазмы. Так что, измеряя критическую частоту, можно определить концентрацию плазмы. Это один из распространенных методов диагностики плазмы.

Электромагнитное поле низкочастотной волны частично все же проникает в плазму, но его амплитуда экспоненциально уменьшается вглубь плазмы. Глубина проникновения в плазму поля поперечной волны с низкой частотой определяется толщиной *вакуумного скин-слоя*, которая обратно пропорциональна плазменной частоте:

$$\delta_{вак} = \frac{c}{\omega_p}. \tag{4.38}$$

Таким образом, глубина проникновения волны в плазму определяется инерцией ее частиц, главным образом - электронов. В пренебрежении инерцией глубина проникновения поля была бы нулевой.

Проиллюстрируем сказанное простым примером. Пусть из вакуума на плоскую границу плазмы падает низкочастотная волна, слева направо, как это показано на рис. 4.2. Слева и справа от границы раздела законы дисперсии волны разные:

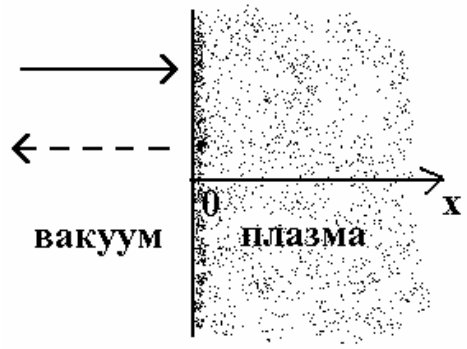


Рис. 4.2. Отсечка низкочастотной поперечной волны на границе плазмы

$$\omega^2 - k^2c^2 = \begin{cases} \omega_p^2, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Эти соотношения можно записать в дифференциальном виде. Пусть частота волны фиксирована, заменив

$$k \to -i\partial_x,$$

получим уравнения

$$\partial_x^2 f = \begin{cases} \dfrac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2} f, & x > 0, \\ -\dfrac{\omega^2}{c^2} f, & x < 0, \end{cases} \tag{4.39}$$

где функция f задает поле волны: например, это может быть компонента напряженности электрического поля. На границе раздела потребуем выполнения условий непрерывности:

$$\begin{aligned} \partial_x f|_{x=+0} &= \partial_x f|_{x=-0}, \\ f|_{x=+0} &= f|_{x=-0}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Нетрудно найти решение задачи (4.39), (4.40), удовлетворяющее этим условиям. Предлагаем читателю проверить, что таковым является решение, в котором в области вакуума поле складывается из поля падающей и отраженной волны, а в области плазмы волновое поле экспоненциально затухает:

$$f = f_0 \begin{cases} \left\{ exp\left(\dfrac{\omega}{c} x\right) + \alpha\, exp\left(-i\dfrac{\omega}{c} x\right) \right\}, & x < 0, \\ \beta\, exp(-\kappa x), & x > 0, \end{cases} \tag{4.41}$$

где обозначено

$$\kappa = \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} > 0$$

- коэффициент пространственного затухания поля волны в плазме, f_0 – амплитуда падающей на границу раздела волны. Амплитудные коэффициенты α для отраженной волны и β для поля в плазме, как это вытекает из условий непрерывной сшивки (4.40), оказываются равными:

$$\alpha = \frac{\omega - i\kappa c}{\omega + i\kappa c}, \quad \beta = \frac{2\omega}{\omega + i\kappa c}.$$

Обратим внимание, что числитель и знаменатель первой формулы являются комплексно-сопряженными. Поэтому получаем

$$|\alpha| = 1,$$

и, следовательно, амплитуды падающей волны и отраженной совпадают. Это и означает наличие полного отражения падающей на плазму волны.

В пределе совсем низких частот, когда $\omega \to 0$, получаем приближенно

$$\alpha \approx -1 - 2i\frac{\omega}{\omega_p} \to -1, \quad \beta = -2i\frac{\omega}{\omega_p} \to 0, \quad \kappa \approx \delta_{вак}^{-1},$$

и длина затухания поля в плазме совпадает с длиной вакуумного скин-слоя.

§ 31. Ленгмюровские колебания и волны в плазме. Плазмоны

Рассмотрим теперь закон дисперсии высокочастотных продольных плазменных волн с частотой в области ленгмюровской частоты. Они известны как *ленгмюровские волны* и представляют собой важнейший тип возмущений, способных существовать и распространяться в плазме.

Закон дисперсии продольных волн определяет, как было показано выше, уравнение

$$\varepsilon_l = 0 ,$$

в которое следует подставить продольную компоненту диэлектрической проницаемости. Если плазму считать холодной, то диэлектрическую проницаемость следует определять по формуле (4.19), и мы приходим к уравнению

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 0 .$$

Оно имеет два решения, отличающиеся знаком. Положительный корень равен

$$\omega = \omega_p \qquad (4.42)$$

Как мы видим, в рассматриваемом случае частота волны совпадает с ленгмюровской частотой и не зависит от величины волнового числа. Фазовая скорость таких волн

$$v_ф \equiv \frac{\omega}{k} = \frac{\omega_p}{k} \qquad (4.43)$$

уменьшается с увеличением волнового числа, а групповая скорость оказывается равной нулю:

$$\vec{v}_{гр} \equiv \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = \frac{\partial \omega_p}{\partial \vec{k}} \equiv 0 . \qquad (4.44)$$

Таким образом, в холодной плазме ленгмюровские волны не могут переносить энергию: фактически это обычные колебания плотности заряда, возникающие вследствие нарушения квазинейтральности плазмы. Если же мы учтем теперь тепловое движение частиц плазмы, то ситуация изменится кардинально. Диэлектрическую проницаемость определяет теперь формула (4.32) и дисперсионное уравнение для продольных волн становится таким:

$$\varepsilon_l = 1 - \sum_{\alpha=e,i} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - k^2 c_{s\alpha}^2} = 0 ,$$

или

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - k^2 c_{se}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - k^2 c_{si}^2} = 0, \quad c_{se,i}^2 = \gamma_{e,i} \frac{T_{e,i}}{m_{e,i}} . \qquad (4.45)$$

Это уравнение несложно решить в общем виде. Но в интересующей нас сейчас высокочастотной области следует учесть, что ионы плазмы можно считать неподвижными, а потому их вклад в диэлектрическую проницаемость будет пренебрежимо малым. Формально это отвечает пределу $m_i \to \infty$, и уравнение (4.45) упрощается:

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - k^2 c_{se}^2} = 0, \quad c_{se}^2 = \gamma_e \frac{T_e}{m_e} .$$

Теперь его уже не сложно решить, и мы, вновь выбирая положительный корень, получаем:

$$\omega = \sqrt{\omega_{pe}^2 + k^2 c_{se}^2} . \qquad (4.46)$$

Это соотношение и определяет закон дисперсии ленгмюровской волны в плазме с конечной температурой.

Любопытно отметить, что это соотношение по виду оказывается вполне аналогичным известной формуле, определяющей связь энергии и импульса релятивистской частицы:

$$\varepsilon = \sqrt{\left(mc^2\right)^2 + p^2c^2}\ .$$

По этой причине о законе дисперсии (4.46) говорят как о «частице-подобном», а ленгмюровские волны в этом плане являются «квазичастицами», которые принято называть *плазмонами*.

Полезно отметить также, что закон дисперсии (4.46) можно записать в виде:

$$\omega = \omega_{pe}\sqrt{1 + \gamma_e k^2 r_{De}^2}\ . \qquad (4.47)$$

Второе слагаемое под корнем будет больше или порядка единицы, когда длина волны будет меньше дебаевского радиуса. В этом случае ленгмюровская волна сильно поглощается за счет механизма бесстолкновительного поглощения Ландау, так как оказывается резонансной по отношению к электронам плазмы,

$$v_\phi \sim v_{Te}\ .$$

По этой причине ленгмюровские волны могут существовать в плазме без существенного поглощения лишь в обратном пределе, когда их длина волны меньше дебаевского радиуса. В этом случае в (4.47) второе слагаемое под корнем можно считать малым и разложить по этой малости:

$$\omega \approx \omega_{pe}\left(1 + \frac{\gamma_e}{2}k^2 r_{De}^2\right), \quad k^2 r_{De}^2 << 1\ .$$

Аналогия с энергией частицы опять остается в силе, но теперь в нерелятивистском пределе, когда энергия связана с импульсом следующим образом:

$$\varepsilon \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m}\ .$$

В области частот ленгмюровских волн гидродинамическое описание, следствием которого фактически является закон (4.47), будет адекватным при выборе

$$\gamma_e = 3\ .$$

Подставив это значение в (4.47), получим окончательно

$$\omega \approx \omega_{pe}\left(1 + \frac{3}{2}k^2 r_{De}^2\right), \quad k^2 r_{De}^2 << 1\ . \qquad (4.48)$$

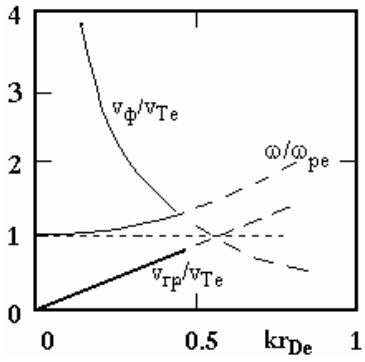


Рис.4.3 Закон дисперсии ленгмюровской волны

Именно об этом соотношении и говорят обычно как о законе дисперсии ленгмюровских волн в плазме. Строго говоря, он справедлив, как мы видели, лишь при выполнении сильного неравенства $k^2 r_{De}^2 << 1$. Однако качественно закон дисперсии (4.48) остается в силе и при выполнении более мягкого условия, когда длина волны составляет несколько дебаевских радиусов. Второе слагаемое в скобках в формуле (4.48) принято называть тепловой поправкой. Учет этой поправки приводит к тому, что групповая скорость ленгмюровской волны, в отличие от случая холодной плазмы, становится ненулевой (см. рис.4.3):

$$\vec{v}_{гр} = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}} = 3\omega_{pe}\vec{k}r_{De}^2, \quad v_{гр} = \sqrt{3}v_{Te}kr_{De}\ , \qquad (4.49)$$

фазовая же скорость приближенно определяется формулой

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} \approx \frac{\omega_{pe}}{k} = \frac{v_{Te}}{\sqrt{3}kr_{De}}\ . \qquad (4.50)$$

При учете теплового движения частиц ленгмюровские волны получают возможность распространяться в плазме, перенося энергию.

§ 32. Ионные ленгмюровские волны. Ионно-звуковые волны в плазме

Вернемся вновь к дисперсионному уравнению (4.45). Для рассмотренных выше ленгмюровских волн групповая и фазовая скорости удовлетворяют неравенству

$$v_{гр} < v_{Te} < v_{ф}.$$

Теперь рассмотрим возможность распространения в плазме волн, фазовая скорость которых значительно меньше тепловой скорости электронов:

$$v_{ф} << v_{Te}.$$

Если это условие выполнено, то в уравнении (4.45) в знаменателе второго слагаемого можно опустить ω^2 и тогда это уравнение приводится к виду

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 c_{se}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - k^2 c_{si}^2} = 0, \quad c_{se,i}^2 = \gamma_{e,i} \frac{T_{e,i}}{m_{e,i}}.$$

Теперь уже не сложно найти интересующее нас решение:

$$\omega^2 = k^2 c_{si}^2 + \frac{\omega_{pi}^2}{1 + \dfrac{\omega_{pe}^2}{k^2 c_{se}^2}}.$$

Учтем теперь, что по определению соответствующих величин имеет место соотношение:

$$\frac{c_{se}^2}{\omega_{pe}^2} \equiv \frac{\gamma_e T_e / m_e}{4\pi e^2 n_{ei} / m_e} \equiv \gamma_e r_{De}^2.$$

Тогда полученный нами результат можно записать в виде

$$\omega^2 = k^2 c_{si}^2 + \frac{\omega_{pi}^2}{1 + \dfrac{1}{\gamma_e k^2 r_{De}^2}}. \qquad (4.51)$$

Для коротких волн, когда длина волны меньше электронного дебаевского радиуса, знаменатель во втором слагаемом примерно равен единице, и мы получаем:

$$\omega^2 \cong k^2 c_{si}^2 + \omega_{pi}^2 \equiv \omega_{pi}^2 \left\{ 1 + \frac{\gamma_i T_i}{Z T_e} k^2 r_{De}^2 \right\}, \quad k^2 r_{De}^2 << 1. \qquad (4.52)$$

Частота этих волн оказывается порядка ионной ленгмюровской частоты. По аналогии с (4.46), эти волны называют *ионными ленгмюровскими волнами*. Как правило, если температура ионов не мала, они сильно затухают в плазме, так как оказываются резонансными по отношению к ионам.

В обратном пределе длинных волн, длина волны которых превышает электронный дебаевский радиус, в знаменателе второго слагаемого в формуле (4.51) главным, напротив, является второй член, и мы получаем:

$$\omega^2 \cong k^2 c_{si}^2 + \gamma_e k^2 r_{De}^2 \omega_{pi}^2 \equiv k^2 c_s^2, \quad k^2 r_{De}^2 << 1. \qquad (4.53)$$

где обозначено

$$c_s^2 \equiv c_{si}^2 + \gamma_e r_{De}^2 \omega_{pi}^2 = \frac{Z\gamma_e T_e + \gamma_i T_i}{m_i}. \qquad (4.54)$$

Сравнив (4.54) с точным результатом кинетической теории [18], заключаем, что в рассматриваемом диапазоне частот кинетика и гидродинамика, использованная нами, дают совпадающие результаты при выборе

$\gamma_e = 1, \quad \gamma_i = 3$,

так что (4.54) следует записывать в виде:

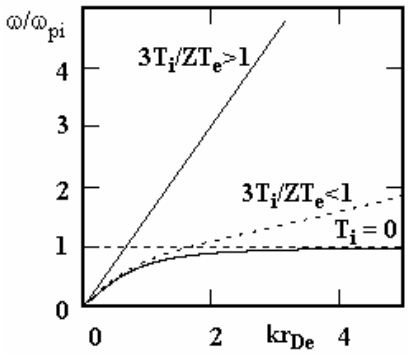


Рис. 4.4. Ионно-звуковые волны в плазме

$$c_s^2 = \frac{ZT_e + 3T_i}{m_i}. \qquad (4.55)$$

Вытекающий из соотношения (4.53) закон дисперсии

$$\omega = kc_s, \qquad (4.56)$$

согласно которому частота волны оказывается прямо пропорциональной волновому числу, типичен для звуковых волн (напомним, что мы обсуждаем сейчас продольные волны!). Например, закон дисперсии звука в обычном газе

$$\omega = kc_s, \quad c_s = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}} = \sqrt{\frac{\gamma T}{M}},$$

где T - температура, а M - масса молекул газа. По этой причине волны с законом дисперсии (4.55), (4.56) принято называть *ионно-звуковыми волнами.* Наряду с ленгмюровскими волнами, это важнейший тип способных распространяться в плазме волн (см. рис.4.4).

Очевидно, фазовая и групповая скорости ионно-звуковой волны совпадают:

$$v_\phi = v_{гр} = c_s = \sqrt{\frac{ZT_e + 3T_i}{m_i}}. \qquad (4.57)$$

Величина этих скоростей существенно зависит от соотношения температур компонент плазмы. При этом если

$T_i \geq T_e$,

то фазовая скорость ионно-звуковой волны будет по величине порядка тепловой скорости ионов. Такие волны должны сильно поглощаться в плазме, так как они становятся резонансными по отношению к ионам. Поэтому ионно-звуковая волна может существовать только в сильно неизотермической плазме, когда электронная компонента сильно «перегрета» по отношению к ионной. В этом случае вклад температуры ионов в формуле (4.57) является малым, и поэтому скорость ионно-звуковой волны главным образом определяется температурой электронов:

$$c_s \cong \sqrt{\frac{ZT_e}{m_i}}, \quad T_e >> T_i. \qquad (4.58)$$

В этом случае, поскольку в формулу для скорости звука в качестве меры тепловой энергии входит электронная температура, а в качестве инерционного фактора входит масса ионов, принято эти волны называть *«ионным звуком с электронной температурой».* Собирая вместе все указанные выше неравенства, получим область фазовых скоростей, в которой возможно существование ионно-звуковых волн:

$$v_{Ti} = \sqrt{\frac{3T_i}{m_i}} << v_\phi \sim c_s \cong \sqrt{\frac{ZT_e}{m_i}} << v_{Te} = \sqrt{\frac{3T_e}{m_e}}. \qquad (4.59)$$

Взяв теперь эти неравенства в качестве отправной точки, можно существенно упростить вывод закона дисперсии для ионного звука. Действительно, поскольку фазовая скорость волны предполагается малой по сравнению с тепловой скоростью электронов, инерция последних

становится несущественной, по этой причине электронная подсистема может считаться квазиравновесной, а, следовательно, действующие в этой подсистеме силы – сила со стороны поля волны и сила, обусловленная градиентом электронного давления, – должны быть уравновешены. Поскольку продольная волна всегда является потенциальной, введем потенциал поля волны согласно

$$\tilde{\vec{E}} = -\nabla\varphi .$$

Тогда баланс указанных сил, предполагая электронную температуру постоянной, можно записать так:

$$|e| n_e \nabla\varphi - T_e \nabla n_e = 0 , \qquad (4.60)$$

и, как мы видим, концентрация электронов определяется распределением потенциала поля волны. Можно сказать и так: «безынерционные» электроны мгновенно подстраиваются под профиль поля, создаваемый волной, скапливаясь в тех областях, где потенциал поля больше:

$$n_e = n_{e0}\, exp\left(\frac{|e|\varphi}{T_e}\right).$$

Здесь n_{e0} - невозмущенная полем волны концентрация электронов (в области нулевого потенциала). Полученный результат, как мы видим, совпадает с известной формулой Больцмана для равновесного распределения частиц, в нашем случае электронов, во внешнем поле.

Для ионной подсистемы плазмы ситуация противоположная. Поскольку фазовая скорость волны значительно превышает тепловую скорость ионов, можно пренебречь конечностью ионной температуры, считая ионы холодными, но принципиально учесть инерцию ионов, ограничивающую частоту колебаний. Для холодных *Z*-кратно ионизованных ионов уравнение движения выглядит так:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -Z|e|\nabla\varphi . \qquad (4.61)$$

Под действием поля волны ионы плазмы приходят в движение, и их концентрация начинает изменяться, так как согласно уравнению непрерывности

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + div\left(n_i \vec{v}_i\right) = 0 . \qquad (4.62)$$

В качестве дополнительного условия, замыкающего систему (4.60) – (4.61), воспользуемся требованием квазинейтральности плазмы

$$n_e = Z n_i , \qquad (4.63)$$

которое, очевидно, должно выполняться, так как длина волны предполагается значительно превышающей электронный дебаевский радиус. В противоположном случае, когда волны короткие, условие (4.63) следует заменить уравнением Пуассона

$$\Delta\varphi = 4\pi|e|\left(n_e - Z n_i\right).$$

Нелинейные уравнения (4.60) – (4.63) справедливы, в рамках высказанных выше предположений, для ионно-звуковых волн любой амплитуды. Ограничимся волнами малой амплитуды. Полагаем

$$\varphi = \tilde{\varphi}, \quad n_{e,i} = n_{e,i0} + \tilde{n}_{e,i}, \quad \vec{v}_i = \tilde{\vec{v}}_i ,$$

где знаком тильда помечены малые возмущения. Подставим это представление в уравнения (4.60) – (4.63), разложим затем по амплитуде и, опустив нелинейные слагаемые, в результате получим

$$\begin{aligned}
&|e| n_{e0} \nabla\tilde{\varphi} - T_e \nabla\tilde{n}_e = 0 ,\\
&m_i \frac{\partial\tilde{\vec{v}}_i}{\partial t} = -Z|e|\nabla\tilde{\varphi} , \qquad (4.64)\\
&\frac{\partial\tilde{n}_i}{\partial t} + div\left(n_{i0}\tilde{\vec{v}}_i\right) = 0 ,\\
&\tilde{n}_e = Z\tilde{n}_i , \quad n_{e0} = Z n_{i0} .
\end{aligned}$$

Выразив теперь все величины через одну из них, например, через потенциал поля волны, получим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{\varphi} - c_s^2 \Delta\tilde{\varphi} = 0, \quad c_s^2 = \frac{ZT_e}{m_i}, \tag{4.65}$$

следствием которого, как нетрудно проверить, является закон дисперсии (4.56), причем величина входящей в него скорости звука определяется формулой (4.58).

Мы рассмотрели самые простые дисперсионные уравнения для незамагниченной плазмы. Для удобства читателей, наиболее важные из них сведены в нижеследующую таблицу 4.1:

Таблица 4.1

Тип волны	Закон дисперсии	Фазовая скорость	Групповая скорость	Примечание
Электронная ленгмюровская волна в холодной плазме	ω_{Le}	ω_{Le}/k	0	$kr_{De} \to 0$
Электронная ленгмюровская волна в «теплой» плазме	$\omega_{Le}\left(1+\frac{3}{2}k^2 r_{De}^2\right)$	$\approx \omega_{Le}/k$	$v_{Te}\left(kv_{Te}/\omega_{Le}\right)$	$kr_{De} << 1$
Ионно-звуковая волна	kc_s	c_s	c_s	$c_s \cong \sqrt{\frac{ZT_e}{m_i}}, \quad T_e >> T_i$ $kr_{De} << 1$
Поперечная плазменная волна	$\sqrt{\omega_{Le}^2 + k^2c^2}$	$c\sqrt{1+\omega_{Le}^2/k^2c^2}$	$c\Big/\sqrt{1+\omega_{Le}^2/k^2c^2}$	

§ 33. Бесстолкновительное затухание волн в плазме

Выше при обсуждении конкретных типов волн, способных распространяться в плазме, мы неоднократно ссылались на резонансные эффекты, имеющие место, когда скорости частиц плазмы совпадают с фазовой скоростью волны. Здесь, не вдаваясь в подробности достаточно сложных математических выкладок (см. [20]), обсудим кратко физическую сторону механизма *бесстолкновительного затухания волн* в плазме, впервые предсказанного Ландау. Когда говорят о резонансном взаимодействии волн и частиц плазмы, то, по сути дела, речь идет о черенковском резонансе

$$\omega - \vec{k}\vec{v} = 0\,. \qquad (4.66)$$

Фазовая скорость поперечной волны в изотропной плазме, как мы видели раньше, превышает скорость света. Следовательно, это условие заведомо не может выполняться и резонансные эффекты такого рода, как можно ожидать, будут несущественны. Имеет смысл поэтому рассмотреть резонансное взаимодействие частиц плазмы с продольными волнами, фазовая скорость которых существенно меньше скорости света, так что выполнение условия резонанса возможно. Пусть для простоты продольная волна будет одномерной (плоской). Обычно механизм бесстолкновительного поглощения энергии волн частицами плазмы поясняют с помощью следующей наглядной картинки, изображенной на рис. 4.5, идею которой мы заимствовали из книги [21].

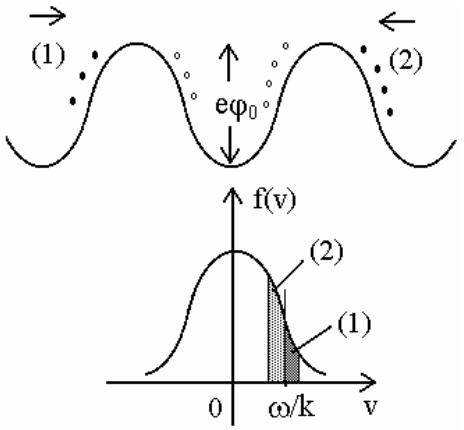


Рис. 4.5. К механизму резонансного поглощения волн в плазме. Вверху: «горбы и впадины» потенциала поля волны в системе ее покоя; стрелками показаны направления скоростей опережающих (1) и отстающих (2) групп частиц. Внизу: функция распределения частиц по скоростям в неподвижной системе координат. Выбранная волна бежит слева направо

В движущейся системе координат, относительно которой волна покоится, наглядно можно ее представлять как последовательность горбов и ям потенциала. Частицы, скатывающиеся в ямы, ускоряются, а частицы, закатывающиеся на горбы, напротив, замедляются полем волны. Выделим, как показано на рис. 3.5, две группы частиц, отвечающих одному и тому же интервалу Δv справа (группа (1)) и слева (группа (2)) от скорости, совпадающей по величине и направлению с фазовой скоростью волны. В движущейся с фазовой скоростью системе координат первые, очевидно, обгоняют волну, а вторые отстают от нее (для наглядности изображено разное количество кружочков). Если в качестве таких групп частиц взять те, которые на рисунке условно изображены черными точками, то обе группы частиц тормозятся, так как их скорости в данный момент времени направлены к «горбам» потенциала, на которые поэтому они вынуждены забираться. Однако движущиеся направо при этом как бы «подталкивают» горб вперед, а движущиеся налево, напротив, «толкают» его назад. Если же в качестве таких групп частиц взять те, которые условно изображены светлыми точками, то поскольку при том же самом направлении скорости частицы обеих групп теперь скатываются с «потенциальных горок», обе они должны ускоряться. Но эффект взаимодействия с волной, очевидно, не должен зависеть от того, как мы выберем расположение по координате этих групп частиц! Очевидно, эти наглядные представления не дают полной картины.

Детально механизм бесстолкновительного взаимодействия разобран в книге [19]. В обмене энергией с полем участвуют частицы со скоростями, близкими к фазовой скорости волны. Причем частицы, движущиеся со скоростью меньшей, чем фазовая скорость, получают энергию от волны, а те частицы, фазовая скорость которых больше фазовой скорости, отдают энергию волне. Если первых несколько больше, чем вторых, т.е. производная функции распределения по скорости отрицательная, то волна будет терять энергию. Именно такова ситуация для равновесной максвелловской функции распределения, поэтому в плазме с такой функцией распределения все волны должны затухать.

§ 34. Диэлектрические свойства магнитоактивной плазмы

Помещение плазмы в магнитное поле очень существенно меняет ее свойства: плазма становится анизотропной. Поэтому волны в плазме при наличии внешнего магнитного поля проявляют значительное разнообразие: скорость их распространения и характер дисперсии существенно зависят от направления распространения волны по отношению к направлению магнитного поля, от взаимной ориентации плоскости колебаний вектора электрического поля волны и «основного» магнитного поля, в которое помещена плазма. Помещенную в магнитное поле плазму иногда называют *магнитоактивной.* Строгое рассмотрение в магнитоактивной плазме возникновения и распространения колебаний и волн различного типа в произвольном направлении в меняющемся магнитном поле представляет очень большие трудности. Мы рассмотрим здесь, естественно, лишь наиболее простые случаи. Будем считать, что внешнее магнитное поле, в которое помещена плазма, постоянно и во времени и в пространстве. Что оно достаточно велико, так что плазма замагничена (напомним, что плазма называется замагниченной, если характерное время межчастичных столкновений значительно превышает периоды вращения частиц плазмы по ларморовским орбитам). В то же время плазму будем считать холодной, пренебрегая тем самым тепловым движением частиц. Такой подход позволяет охватить не все, конечно, но наиболее важные типы волн малой амплитуды в магнитоактивной плазме.

Отметим несколько полезных формальных моментов.

- **Продольные (вдоль магнитного поля) диэлектрические свойства плазмы.**

При распространении в плазме продольной волны вдоль внешнего магнитного поля, очевидно, диэлектрические свойства плазмы такие же, как и в случае, когда этого магнитного поля нет. Колебания частиц плазмы под действием электрического поля волны происходят вдоль магнитных силовых линий внешнего магнитного поля, а в этом случае наличие магнитного поля на эти колебания никак не сказывается. Поэтому очевидно, что (для холодной плазмы) компонента тензора диэлектрической проницаемости вдоль магнитного поля будет такая же, как и в случае без магнитного поля:

$$\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_0 = 1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2, \quad \omega_0^2 = \sum_{\alpha=e,i} \frac{4\pi n_\alpha e_\alpha^2}{m_\alpha} \equiv \sum_{\alpha=e,i} \omega_{L\alpha}^2,$$

где $\omega_{Le,i}$ ленгмюровские частоты частиц плазмы.

Пусть теперь на вмороженную в магнитное поле плазму падает поперечная электромагнитная волна, так, что вектор скорости электромагнитной волны перпендикулярен вектору напряженности магнитного поля, а вектор напряженности электрического поля этой волны *E* коллинеарен (параллелен или антипараллелен) вектору B_0 (рис.4.6). Внешнее магнитное поле будем помечать индексом «*0*», чтобы отличать его от собственного магнитного поля волны. Вновь электрическое поле волны воздействует только на движение частиц вдоль магнитного поля, на которое магнитное поле не сказывается.

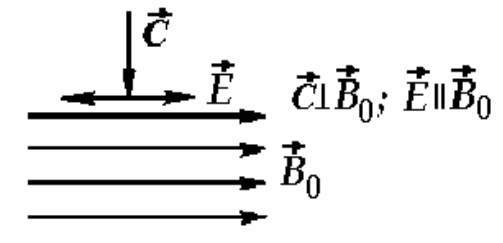


Рис.4.6. Электромагнитная волна распространяется перпендикулярно к $\vec{B}_0$ и ее вектор $\vec{E} \parallel \vec{B}_0$

Поэтому такая волна будет распространяться в замагниченной плазме так же, как она распространялась бы в плазме, свободной от магнитного поля. Это важное обстоятельство широко используется в диагностике плазмы.

- **Вмороженность магнитного поля в идеально проводящую плазму.**

Как известно, закон Ома для среды следует записывать в системе координат, относительно которой она покоится. Поэтому в простейшем случае однородной плазмы, пересекающей в общем случае при движении силовые линии магнитного поля, закон Ома должен быть записан в виде:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}^*, \quad \vec{E}^* \equiv \vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B}, \tag{4.67}$$

где σ - проводимость среды. Если среда – идеальный проводник, $\sigma \to \infty$, то в системе координат, в которой она покоится, электрическое поле отсутствует. Поэтому условие идеальной проводимости оказывается следующим:

$$\vec{E}^* = \vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B} = 0. \tag{4.68}$$

Подставив определяемую этим условием напряженность электрического поля в уравнение индукции

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = rot\vec{E},$$

приходим к уравнению вмороженности:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = rot\left(\vec{v} \times \vec{B}\right). \tag{4.69}$$

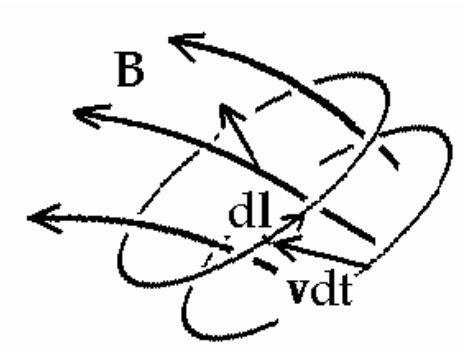


Рис. 4.7. К теореме вмороженности

Это уравнение обладает следующим замечательным свойством. Выделим в плазме некоторый контур, пронизываемый силовыми линиями магнитного поля (рис. 4.7), и смещающийся вместе с плазмой. Поток магнитного поля через этот контур по определению равен интегралу от вектора индукции магнитного поля по площади, охватываемой этим контуром:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B_n dS, \tag{4.70}$$

где B_n – проекция вектора индукции на направление нормали. Проинтегрировав уравнение (4.69) по этому контуру, мы обнаружим, что поток магнитного поля, пронизывающего контур, сохраняется:

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0. \tag{4.71}$$

Сохранение потока и составляет содержание так называемой *теоремы вмороженности.* Поскольку это утверждение справедливо для любого контура, движущегося вместе с веществом, то это означает, что силовые линии магнитного поля как бы «приклеены» к идеально проводящей среде. Поэтому смещение или деформация контура при движении плазмы приводит к соответствующему искажению картины силовых линий магнитного поля.

- **Поперечные диэлектрические свойства плазмы.**

Чтобы понять, какова должна быть структура чисто поперечной компоненты тензора диэлектрической проницаемости плазмы, рассмотрим два предельных случая. Очевидно, что когда поле волны высокочастотное, с частотой значительно превышающей циклотронные частоты вращения частиц плазмы в магнитном поле, то наличие магнитного поля несущественно. Поэтому в этом пределе должно быть

$$\varepsilon_\perp \Big|_{\omega >> \omega_{Be,i}} \approx \varepsilon_\parallel = \varepsilon_0 = 1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2. \tag{4.72}$$

В обратном пределе низких частот, распространение в плазме поперечной электромагнитной волны с вектором напряженности электрического поля, направленным строго перпендикулярно к вектору индукции внешнего магнитного поля (рис.4.8), вполне аналогично помещению плазмы в скрещенные поля – медленно меняющееся электрическое поле волны и однородное внешнее магнитное поле, в которое помещена плазма.

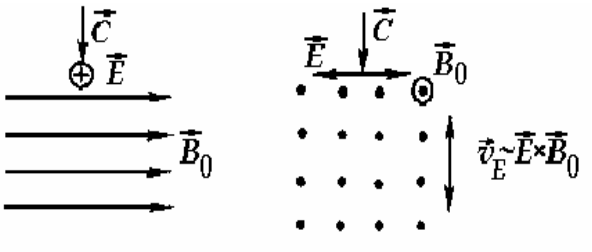


Рис.4.8. Направление электромагнитной волны перпендикулярно к $\vec{B}_0$ и ее вектор $\vec{E}\perp\vec{B}_0$

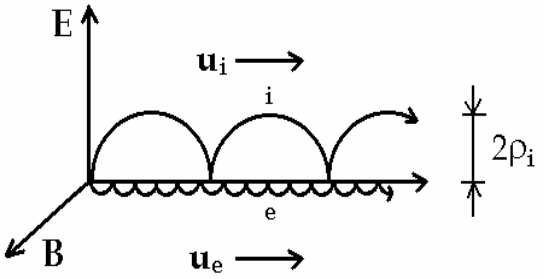


Рис. 4.9. Поляризация плазмы в поле поперечной волны

В этих условиях, очевидно, мы можем воспользоваться дрейфовым приближением, изложенным в § 17. Частицы плазмы должны дрейфовать в направлении, перпендикулярном к электрическому и магнитному полю, со скоростью (рис. 4.9)

$$u_e = u_i = c\frac{E}{B}.$$

При этом, поскольку смещения от равновесных положений вдоль электрического поля положительно заряженных ионов и отрицательно заряженных электронов имеют разный знак, то плазма должна поляризоваться, как это уже обсуждалось в § 20. Там же была рассчитана величина поляризации плазмы и соответствующая ей поперечная компонента диэлектрической проницаемости (2.103). Воспользовавшись этим результатом, получаем, что в рассматриваемом низкочастотном пределе

$$\varepsilon_\perp\Big|_{\omega<<\omega_{Be,i}} = 1 + \sum_{\alpha=e,i}\frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega_{B\alpha}^2}. \qquad (4.73)$$

Поскольку масса ионов значительно превосходит по величине массу электронов, то основной вклад в диэлектрическую проницаемость дают ионы плазмы (это связано с тем, что ларморовский радиус более массивных ионов много больше ларморовского радиуса электронов). Как мы видим, в этом пределе плазма выступает в роли обычного диэлектрика. Если плотность плазмы не является чрезмерно малой, то плазма, как показано в § 20, является весьма хорошим диэлектриком с большой по величине диэлектрической постоянной, значительно большей, чем у всех известных обычных диэлектрических материалов.

Объединяя два предельных случая (4.72) и (4.73), и, учитывая возможность резонанса при совпадении частоты волны и циклотронных частот, уже нетрудно предвидеть в общем случае следующий результат:

$$\varepsilon_\perp == 1 - \sum_{\alpha=e,i}\frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2}. \qquad (4.74)$$

Это подтверждается детальными расчетами[18]. В заключение приведем (для справок) без вывода полную структуру тензора диэлектрической проницаемости холодной плазмы:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_\perp & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel \end{Vmatrix}, \qquad (4.75)$$

диагональные компоненты здесь определяются приведенными выше формулами, а «косые» компоненты определяются величиной:

$$g = -\sum_{\alpha=e,i} \frac{\omega_{B\alpha}\omega_{L\alpha}^2}{\omega(\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2)}. \qquad (4.76)$$

Предполагается, что система координат выбрана так, что ее ось z параллельна вектору индукции внешнего магнитного поля.

§ 35. Волны в магнитоактивной плазме

Если в плазме без магнитного поля спектр возможных волн по существу ограничивается продольными ленгмюровскими и ионно-звуковыми волнами (возможна еще так называемая «энтропийная» волна – своеобразная «ямка давления») и поперечной плазменной волной, то в магнитоактивной плазме помимо этих волн появляется множество новых. Это – поперечные альвеновские волны, магнитозвуковые волны (или магнитный звук, кратко эти волны часто обозначают аббревиатурой МЗВ), а также их разновидности, такие как быстрая МЗВ, медленная МЗВ, «косая» МЗВ, циклотронные резонансы и циклотронные волны, включая ионно-циклотронные и электронно-циклотронные волны, нижнегибридные волны и верхнегибридные волны, геликоны (спиральные волны) или «свистящие атмосферики» и другие.

Как уже отмечалось выше, закон дисперсии волны и ее характер существенно зависят от взаимной ориентации направления распространения волны, т.е. ее волнового вектора $\vec{k}$, вектора внешнего магнитного поля $\vec{B}$ и вектора электрического поля волны $\vec{E}$. Поэтому простейшая классификация волн в магнитоактивной плазме сводится к перебору всех возможных взаимных ориентаций этих трех векторов, некоторые из которых приведены на рис. 4.10. Рассмотрим простейшие случаи.

Продольное распространение волны, волновой вектор параллелен внешнему магнитному полю

- **Продольные волны (** $\vec{E} \| \vec{k} \| \vec{B}_0$ **,** рис. 4.10,а**)**

Как отмечено в предыдущем параграфе, пока речь идет о волнах малой амплитуды, а плазма и магнитное поле предполагаются однородными, «замагничивание» плазмы влияния не оказывает и в плазме возможны обычные ленгмюровские и ионно-звуковые

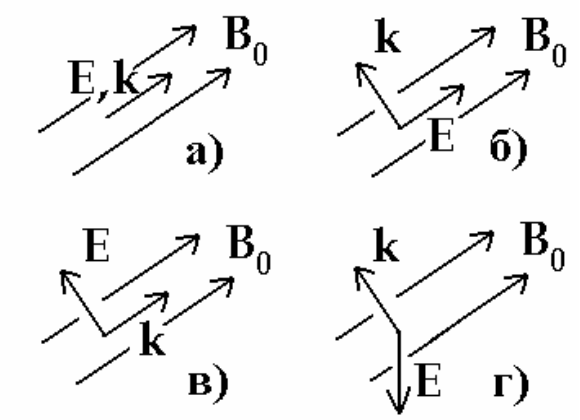


Рис. 4.10. Классификация волн в магнитоактивной плазме:
а – продольная волна;
б – поперечная (обыкновенная) волна;
в –альвеновская волна (поперечная);
г – магнитозвуковая волна (поперечная).

(если температура плазмы считается ненулевой) волны (см. §§ 31,32).

- **Альвеновская волна (** $\vec{E} \perp \vec{k} \| \vec{B}_0$, рис. 4.10,в**)**

Так как волновой вектор и вектор напряженности электрического поля волны взаимно перпендикулярны, то речь идет о поперечной волне, распространяющейся вдоль внешнего поля. Дисперсионное уравнение для поперечной волны (см. § 27) в данном случае сводится к

$$\varepsilon_\perp = N^2, \quad N^2 \equiv \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \equiv v_\Phi^2.$$

Оно особенно простое в низкочастотном пределе, когда согласно (4.73) диэлектрическая проницаемость постоянна и не зависит от частоты. Заметим, что формулу (4.73) можно переписать в виде:

$$\varepsilon_{\perp} = 1 + \frac{c^2}{c_A^2} \quad , \tag{4.77}$$

где введено удобное обозначение

$$c_A = \frac{B}{\sqrt{4\pi n\left(m_i + m_e\right)}} \tag{4.78}$$

для характерной, так называемой *альвеновской скорости* (Х. Альвен, 1942). Она возрастает с ростом величины магнитной индукции и уменьшается с ростом плотности плазмы. Решая дисперсионное уравнение, получим закон дисперсии для этих волн

$$v_{\Phi} = v_{гр} = \frac{c_A c}{\sqrt{c^2 + c_A^2}} . \tag{4.79}$$

Если плазма редкая, так что $c_A >> c$, то эта волна превращается в обычную электромагнитную волну, распространяющуюся со скоростью света. В случае плотной плазмы, когда $c_A << c$, фазовая и групповая скорости этой волны совпадают с альвеновской скоростью:

$$v_{\Phi} = v_{гр} = c_A . \tag{4.80}$$

Это – один из важнейших типов волновых движений магнитоактивной плазмы.

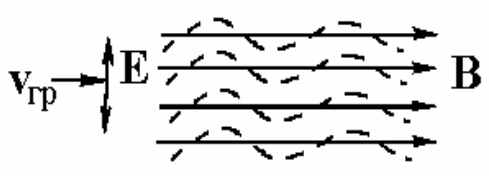


Рис. 4.11. Альвеновская волна, т.е. колебание «натянутых струн» – силовых линий магнитного поля.

Как известно, силовые линии магнитного поля в продольном направлении стремятся сократиться, им можно приписать определенное «натяжение». Упрощенно по этой причине альвеновскую волну можно представлять себе как колебания «натянутых струн» – силовых линий магнитного поля (рис. 4.11), при этом плазма колеблется вместе с магнитным полем, в которое она вморожена.

Отметим, что при произвольном направлении распространения закон дисперсии альвеновской волны оказывается следующим:

$$\omega = \vec{k}\vec{c}_A , \quad \vec{c}_A = \frac{\vec{B}_0}{\sqrt{4\pi n m_i}} , \quad \vec{v}_{гр} = \vec{c}_A . \tag{4.81}$$

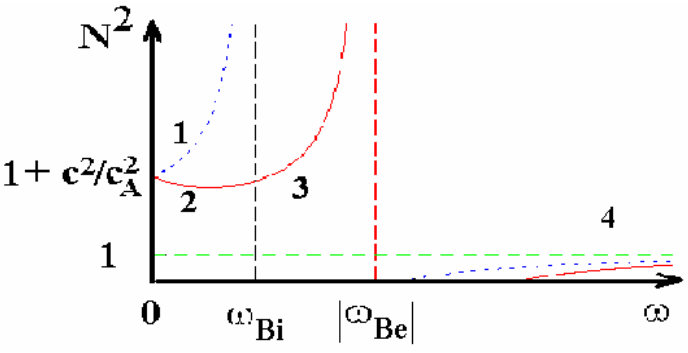


Рис. 4.12. Качественная картина дисперсии поперечных волн при продольном распространении: 1 – собственно альвеновская волна (обыкновенная, левая поляризация), 2 – быстрая МЗВ (необыкновенная, правая поляризация), 3 – область геликонов, 4 – ВЧ-волны

Групповая скорость альвеновской волны, ответственная за перенос волной энергии, параллельна вектору индукции магнитного поля. Напомним, что фазовая скорость для любой волны, в том числе и для альвеновской, параллельна волновому вектору.

Модули групповой и фазовой скорости не зависят от величины волнового вектора. Это означает, что волна не диспергирует. Но это справедливо только в области низких частот. Вблизи циклотронных частот ситуация меняется (рис. 4.12).

Пояснить появление существенной дисперсии можно следующим образом. Известно, что любую плоско поляризованную волну можно представить в виде совокупности двух волн поляризованных по кругу – «лево- и право поляризованных». Если направление вращения оказывается резонансным по отношению к направлению вращения плазменных частиц, а мы знаем, что ионы и электроны плазмы

вращаются в разных направлениях, то мы вправе ожидать появление особенности показателя преломления – аномальной дисперсии. Это и наблюдается (см. рис. 4.12).

Поперечное распространение волны, волновой вектор перпендикулярен внешнему магнитному полю

- **Обыкновенные поперечные волны (** $\vec{k} \perp \vec{E} \| \vec{B}_0$ **,** рис. 4.10,б**)**

В этом случае магнитное поле не оказывает влияния на дисперсию волн, и закон дисперсии оказывается таким же, как в случае плазмы без магнитного поля:

$$\varepsilon_{\|} = N^2, \quad \omega^2 = \omega_{Le}^2 + k^2 c^2. \tag{4.82}$$

- **Магнитозвуковые волны (** $\vec{k} \perp \vec{E} \perp \vec{B}_0$ **,** рис. 4.10,г**)**

В области низких частот закон дисперсии этих волн формально такой же, как и альвеновских:

$$v_{\Phi} = v_{гр} \cong c_A, \tag{4.83}$$

но физика иная: волну можно интерпретировать как последовательность сжатий и разрежений магнитного поля и плотности плазмы (см. рис. 4.13)

Плоские волны сжатия-разряжения распространяются перпендикулярно к магнитному

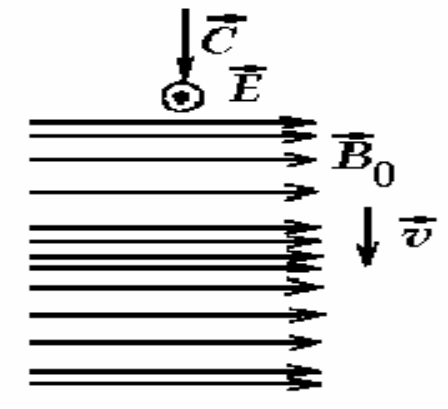


Рис. 4.13. Качественная картина распространения магнитозвуковой волны: последовательность разрежений и сжатий величины магнитного поля и плотности плазмы

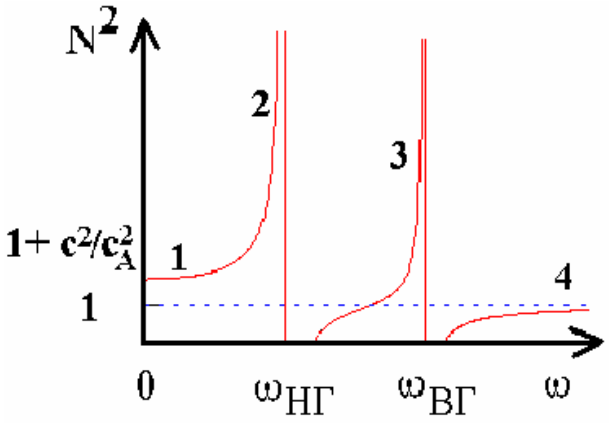


Рис. 4.14. Качественный характер дисперсии магнитозвуковых волн в области высоких частот: 1 – область магнитного звука, 2 – нижнегибридные волны, 3 – верхнегибридные волны, 4 – ВЧ-волны

полю, т.е. они поперечные по отношению к магнитному полю и продольные по отношению к направлению распространения, и поперечные по отношению к ориентации электрического поля и волнового вектора. Эти волны вполне аналогичны звуковым, часто их по аналогии называют магнитным звуком, но необходимо подчеркнуть, что вещество в волне движется не в направлении E, как может показаться, а в направлении распространения колебаний, в направлении волны, т.е. перпендикулярно к E и B (как это имеет место при дрейфовом движении в скрещенных E и B полях). По существу это и есть дрейфовое движение, так как рассматривается движение массы, а она сосредоточена в ионах.

Если надо учитывать и давление газа при сжатии, то уравнение (4.83) изменится:

$$v^2 = \frac{B^2}{4\pi n m_i} + \gamma \frac{p}{n m_i} = \frac{B^2}{4\pi n m_i}\left(1 + \frac{1}{2}\gamma\beta\right). \tag{4.84}$$

Если вторым членом можно пренебречь (т.е., если $\beta \to 0$), то остается чисто магнитный звук; предел плазмы низкого давления, $\beta \to 0$, можно рассматривать как определение приближения холодной плазмы.

Отсутствие дисперсии, так же как и в случае альвеновской волны, имеет место только при частотах, существенно меньших, чем ионная циклотронная частота. При больших частотах возникает аномальная дисперсия (рис. 4.14). Но теперь нельзя ожидать резонанса только на ионной или только на электронной циклотронной частоте: в формировании волны принимают участие одновременно оба сорта частиц плазмы. В результате частоты, отвечающие появлению аномальной дисперсии, зависят от циклотронных частот обоих сортов частиц плазмы. Это так называемая *нижнегибридная частота*, определяемая для плотной плазмы приближенно соотношением

$$\omega_{НГ} \cong \sqrt{|\omega_{Be}\omega_{Bi}|}, \tag{4.85}$$

то есть она совпадает со средним геометрическим из циклотронных частот, а также *верхнегибридная частота*, приближенно равная (подробнее см. [18])

$$\omega_{ВГ} \cong \sqrt{\omega_{Le}^2 + \omega_{Be}^2}. \tag{4.86}$$

В области частот $\omega < \omega_{НГ}$ в плазме возможно распространение магнитозвуковых волн, в области частот $\omega > \omega_{НГ}$ возможно распространение высокочастотных волн, в области частот $\omega_{НГ} < \omega << \omega_{ВГ}$ чисто поперечное распространение волн невозможно.

§ 36. Неустойчивости плазмы

Плазма, с которой приходится иметь дело в лабораторных экспериментах, как правило, сильно неравновесная и обладает высокой плотностью энергии, значительно превышающей плотность энергии в окружающей среде. По законам термодинамики такой неравновесный объект, будучи предоставлен сам себе, должен стремиться к равновесию с окружающей средой, а, значит, охлаждаться. Релаксация к равновесию может происходить сравнительно спокойно: при наличии небольших градиентов, например, концентрации или температуры, возникают потоки вещества и энергии, пропорциональные этим градиентам и стремящиеся устранить имеющуюся неоднородность, возникают переносы, которые мы обсуждали кратко в § 10. Для поддержания существования неравновесного состояния, естественно, должны присутствовать внешние источники тепла и частиц, компенсирующие потери и обеспечивающие стационарное существование плазмы. Именно такова ситуация в стационарных газовых разрядах: слаботочный несамостоятельный газовый разряд в промежутке между двумя электродами с заданной разностью потенциалов, когда за создание заряженной компоненты отвечает внешний ионизатор, может длительное время существовать при наличии такого ионизатора, но прекращается при его выключении. Аналогична, по существу, ситуация и в случае самостоятельного разряда, в котором включается механизм самоподдержания плазмы, так что необходимость во внешнем ионизаторе отпадает, но стационарное существование плазмы, естественно, поддерживается внешним источником, задающим разность потенциалов и обеспечивающим протекание тока, необходимого для поддержания разряда.

Миллионы и миллиарды лет светят звезды, устойчивое существование которых обеспечивает баланс давления вещества и гравитации, контролируемый выделением энергии в ядерных реакциях синтеза в недрах звезды и ее излучением. Как и у плазмы газовых разрядов, так и у плазмы звезд, возможны разные состояния устойчивого стационарного существования, значительно различающиеся по энергосодержанию. При соответствующем изменении режима источника, поддерживающего существование плазмы, переход между этими состояниями может быть «плавным», без каких-либо катастроф. Например, звезда, лишенная ядерного «горючего», может излучить избыток тепловой энергии и просто потухнуть, но возможны и катастрофические процессы типа вспышек Сверхновых, когда переход звезды в новую устойчивую фазу ее существования носит неустойчивый характер и сопровождается взрывом. Известно много примеров неустойчивого поведения и у плазмы газовых разрядов: возникновение страт, филаментация (шнурование), «шипящие» дуги и прочее.

Особую роль неустойчивости плазмы приобретают в проблеме создании и удержании плазмы в установках по управляемому термоядерному синтезу. Естественно, условия устойчивого удержания плазмы «звездных» температур в лабораторных условиях не были известны изначально, когда термоядерная программа только начиналась. Поэтому историю термоядерных исследований, в определенном смысле, можно трактовать как историю открытия новых неустойчивостей плазмы, разработки и совершенствования методов их подавления. Принято различать [12] *магнитогидродинамические (МГД) неустойчивости* плазмы, сравнительно медленные, но приводящие к макроскопическим последствиям – к катастрофическому нарушению формы

плазменного сгустка, выбросам больших сгустков плазмы на периферию, и т.п., а также микронеустойчивости, или *кинетические неустойчивости*, обязанные своим происхождением особенностям неравновесной функции распределения частиц плазмы по скоростям. В конечном итоге, эти неустойчивости приводят к генерации в плазме ускоряющих полей и шумов, вызывающих аномально большие потоки тепла и частиц. Естественно, любое конкретное устройство по удержанию плазмы должно в первую очередь удовлетворять условиям макроскопической устойчивости равновесия плазмы, и, когда такие неустойчивости подавлены, на первый план выступают кинетические неустойчивости и уже они главным образом ограничивают время жизни частиц в плазме и время удержания энергии плазмы.

МГД неустойчивости

- **Неустойчивость Релея - Тейлора**

Это одна из фундаментальных неустойчивостей, которая имеет многочисленные проявления в Природе. Применительно к плазме ее разновидностью является желобковая неустойчивость (см. § 19), называемая также конвективной или перестановочной неустойчивостью [22].

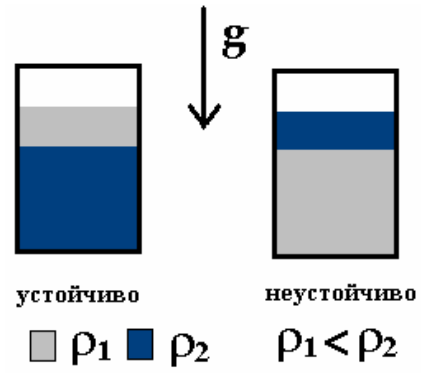


Рис. 4.15. К неустойчивости Релея – Тейлора: ρ - плотность жидкости

Природу неустойчивости обычно поясняют на следующем простом примере. Пусть в стакан налиты два слоя несмешивающихся жидкостей с разными плотностями (рис. 4.15). Равновесию в поле сил тяжести здесь, очевидно, отвечает горизонтальность границы раздела между жидкостями. Если верхняя из жидкостей имеет меньшую плотность, то эта ситуация будет устойчивой и малые возмущения не разрушат начальное равновесие. Если же верхняя жидкость имеет большую плотность, то равновесие неустойчиво и малые возмущения его разрушат. В конце концов, тяжелая жидкость «протечет» вниз, жидкости поменяются местами, и система придет к устойчивому равновесию.

Сходная ситуация имеет место на границе между плазмой и однородным магнитным полем. Роль «легкой жидкости» здесь играет магнитное поле, и, если направление ускорения окажется неблагоприятным, то нарастают желобки, как это качественно показано на рис. 4.16. Для характеристики удержания плазмы в неоднородном магнитном поле обычно вводят параметр

$$\beta = 8\pi p / B^2 ,$$

характеризующий отношение давления плазмы к давлению магнитного поля (см. § 23). Если $\beta<1$, то говорят о плазме низкого давления, если $\beta>1$, то – высокого. Если магнитным полем удерживается плазма с $\beta\sim1$, то судьба возникающего на границе плазма –



Рис. 4.16. Желобки на границе плазма – магнитное поле. Кружки с точками условно изображают силовые линии магнитного поля

магнитное поле плазменного «языка», раздвигающего силовые линии, зависит от того, нарастает или убывает магнитное поле при удалении от плазмы. Если магнитное поле от границы наружу убывает, то поскольку здесь будет $p>B^2/8\pi$, то локальное возмущение стремится расти. Наоборот, если магнитное поле растет наружу от границы, то рост возмущения невозможен. В большинстве предложенных магнитных ловушек магнитное поле убывает наружу, поэтому прогноз по устойчивости плазмы высокого давления выглядит неутешительно (без каких-либо дополнительных усилий). К счастью, однако, во многих устройствах плазма принципиально должна быть низкого давления $\beta<<1$. В этом случае можно обеспечить устойчивость в среднем, если для любой выделенной плазменной трубки будет выполнен принцип «минимума – В»:

$$\delta \int dl/B < 0 ,$$

который подробно обсуждался в § 19. Входящий в эту формулу интеграл вдоль силовой линии (вдоль которой ориентирована выделенная нами трубка) как раз и обеспечивает «взвешивание» вклада благоприятных и неблагоприятных участков. Выделенная плазменная трубка удерживается устойчиво, если занимаемый ею объем будет максимален в положении равновесия, что и отражено в написанном критерии.

- **Неустойчивость Кельвина – Гельмгольца.**

Это еще один пример классической гидродинамической неустойчивости, способной развиваться при наличии неоднородности скорости потока жидкости или плазмы. В простейшем случае в качестве неоднородного потока можно представить себе два несмешивающихся потока жидкости, текущих с разными скоростями выше и ниже границы раздела – тангенциального разрыва (рис. 4.17,а). Если граница потоков возмущается, например, появляется горб, как это показано на рис. 4.17,б, то скорость потока сверху увеличивается, а снизу уменьшается. По теореме Бернулли давление жидкости меняется в противоположном направлении, снизу «горба» оно становится больше и первоначальному возмущению выгодно расти.

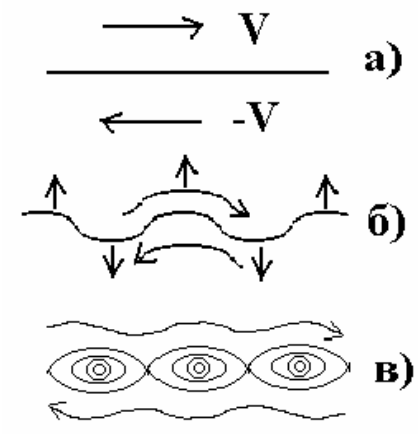


Рис. 4.17. Последовательные стадии развития неустойчивости скачка скорости потоков.

В результате слой разбивается на систему изолированных вихрей, из-за характерной формы линий тока (рис. 4.17,в) их называют «кошачьими глазами» Кельвина, открывшего эту неустойчивость еще в позапрошлом веке.

- **Разрывная неустойчивость. Перезамыкание силовых линий магнитного поля**

Внешне подобно выглядит картина неустойчивости плоскости скачка магнитного поля – так называемого нейтрального токового слоя (рис. 4.18). Природа неустойчивости здесь иная. Упрощенно ее можно трактовать следующим образом. Равномерно распределенный по плоскости скачка поля токовый слой можно рассматривать как бесконечную совокупность одинаковых эквидистантных элементарных токов. Положение каждого из них является

равновесным, так как притяжение соседей справа в точности компенсируется

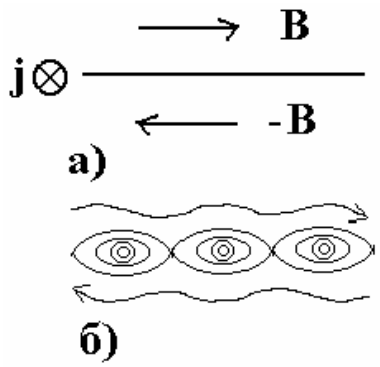


Рис. 4.18. Разрывная неустойчивость токового слоя. Крестиком помечено направление тока в слое (а). Оно сохраняется и в системе филаментов, на которую распадается слой (б)

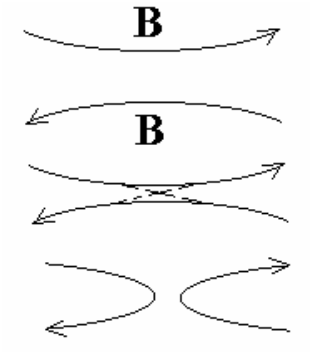


Рис. 4.19. К механизму перезамыкания силовых линий магнитного поля

притяжением соседей слева. Но стоит нам нарушить равномерность распределения, сблизив группу из нескольких токов, как мы обнаружим, что их взаимное притяжение будет сильнее притяжения соседей, они начнут стягиваться в единую изолированную токовую нить – филамент. Результатом развития неустойчивости будет разрыв токового слоя и разбиение его на совокупность филаментов. По этой причине неустойчивость часто называют *разрывной*, или *тиринг-неустойчивостью* (от английского: tearing instability). Физической картине неустойчивости можно придать иную трактовку, если вспомнить, что силовые линии «обладают натяжением», а потому стремятся сократиться (см. § 23). С этой точки зрения «растянутые» силовые линии конфигурации на рис. 4.18,а не выгодны, силовым линиям выгодно «перезамкнуться» через слой, сократив свою длину (рис. 4.19). Это и происходит, как мы видели выше. Термин *перезамыкание* прочно вошел в современную плазменную науку.

- **Неустойчивости токовых систем (*Z* – пинчей)**

Z – пинч – это самосжатый столб плазмы с продольным (вдоль оси *z*) током, окруженный создаваемым этим током магнитным полем.

Равновесие здесь обеспечивается балансом магнитного давления и давления плазмы, как это было показано в § 24. Динамические процессы, сопровождающие возникновение такого пинча обсуждались в § 25. Здесь обсудим устойчивость подобного равновесия, полагая для простоты, что ток плазмы полностью скинирован - сосредоточен в основном в приповерхностном слое. Тогда внутри плазмы пинча нет магнитного поля, и равновесие обеспечивается балансом давлений плазмы и магнитного поля на границе (см. рис. 4.20):

$$p_{плаз} = p_{маг}, \quad p_{маг} = \frac{B_\varphi^2}{8\pi}, \quad B_\varphi = \frac{2I}{ca}. \tag{4.87}$$

Здесь a – радиус плазменного столба, I – полный ток, и мы учли, что вне плазмы для прямого столба магнитное поле совпадает с полем прямого провода.

- **Перетяжки**

Магнитное давление вне пинча увеличивается с уменьшением радиуса, как это очевидно из формулы (4.87). При местном сужении токового канала плазма выдавливается из места сужения (подобно пасте, выдавливаемой из тюбика, рис. 4.20б), поэтому давление ее не может противодействовать нарастающему давлению магнитного поля, и перетяжке выгодно нарастать.

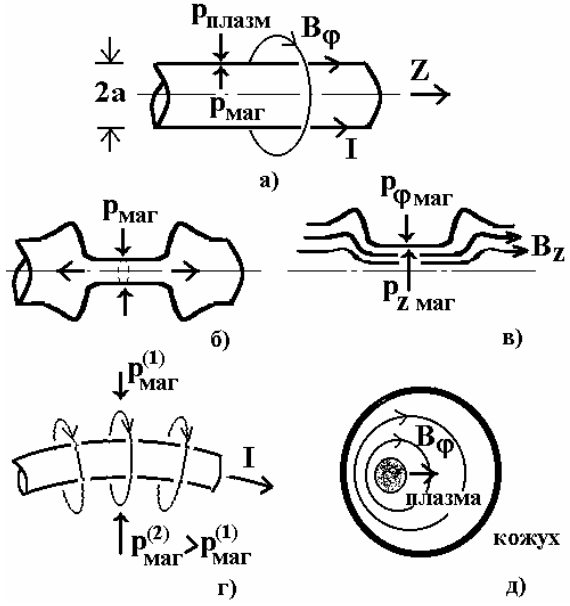


Рис. 4.20. Неустойчивости плазмы с током: а – скинированный пинч; б – перетяжка; в – стабилизация перетяжки продольным полем: в области пережатия силовые линии сгущаются, давление внутреннего поля нарастает; г – изгиб - «змейка»; д – стабилизация изгиба проводящим кожухом

Развитие перетяжек можно предотвратить, если в плазму пинча «вморозить» продольное магнитное поле (рис. 4.20,в). Поток продольного поля сохраняется

$$\Phi = \pi a^2 B_z = const, \quad B_z \sim a^{-2}, \quad p_{z\,маг} \sim a^{-4}, \qquad (4.88)$$

а поэтому эта компонента магнитного поля при сжатии увеличивается, и увеличивается соответствующее ему давление внутреннего магнитного поля. Причем оно нарастает, как это видно из сравнения (4.87) и (4.88), быстрее давления внешнего магнитного поля. Это и приводит к возможности стабилизации перетяжек. Можно показать, что перетяжки не будут развиваться, если вмороженное продольного поля будет достаточно велико:

$$B_z > \frac{B_\varphi}{\sqrt{2}},$$

где B_φ - магнитное поле тока на границе пинча. Возможность стабилизации перетяжек вмороженным полем была подтверждена экспериментально.

- **«Змейка»**

«Змейка» – это неустойчивость токового канала к изгибу (рис. 4.20,г). Наглядно причину развития неустойчивости можно пояснить следующим образом: при изгибе, как это качественно показано на рис. 4.20,г, силовые линии магнитного поля снаружи места изгиба разрежаются, а внутри – сгущаются. В результате появляется сила, усиливающая первоначальное возмущение, так что изгибу выгодно расти. Нарастание изгибов канала разряда неоднократно наблюдалось в экспериментах на *Z*-пинчах.

«Змейки» можно стабилизировать, если окружить плазму хорошо проводящим кожухом (реально именно так и делают, плазменный шнур окружают массивным медным кожухом). При быстром изгибе токового канала магнитное поле за счет скин-эффекта не успевает проникнуть в проводящий кожух, и силовые линии магнитного поля тока оказываются «зажаты» между стенкой и плазмой (см. рис. 4.20,д.). Ввиду сохранения потока, в этой области

магнитное поле станет больше, чем на диаметрально противоположной стороне токового канала, и возникает сила, стремящаяся восстановить равновесие. Поскольку механизм стабилизации существенно связан со временем скинирования, медленный изгиб, очевидно, стабилизироваться не может. В этом случае более эффективно управлять положением токового шнура с помощью дополнительных проводников с током, располагаемых на периферии плазмы.

- **Винтовая неустойчивость. Критерий Шафранова - Крускала**

Возникновения змеек можно было бы избежать, если снаружи окружить пинч продольным магнитным полем. Но ситуация здесь не такая однозначная, как может показаться на первый взгляд. Внешнее магнитное поле складывается с магнитным полем тока пинча, и образуется конфигурация с винтовыми силовыми линиями (рис. 4.21,а). При изгибе токового канала действующие на разные его участки силы Ампера со стороны внешнего поля «скручивают» плазменный шнур, как это показано на рис. 4.21,б, и шнур стремится завиться в винт. Это и определило название обсуждаемой неустойчивости. Сила Ампера, действующая на ток в магнитном поле, исчезает, когда ток параллелен силовой линии. Именно такое положение и стремится занять токовый шнур, завиваясь в винт. Нетрудно подсчитать шаг винтовой силовой линии. Так как длина окружности в сечении шнура радиуса a составляет $2\pi a$, а при однократном обходе вокруг шнура смещение равно шагу силовой линии h, то, умножив длину окружности на соответствующий угловой коэффициент, получаем

$$h = 2\pi a \frac{B_z}{B_\varphi}. \qquad (4.89)$$

Если учесть, что концы шнура «вморожены» в хорошо проводящие электроды, как это показано на рис. 4.21,б, то в промежутке длины L не уложится ни одного шага винта, а, значит, винтовая неустойчивость развиваться не сможет, если выполнено условие

$$h = 2\pi a \frac{B_z}{B_\varphi} > L. \qquad (4.90)$$

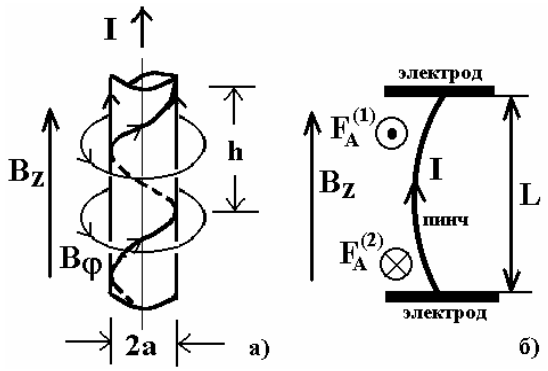


Рис. 4.21. Винтовая неустойчивость

Это и есть критерий устойчивости относительно развития винтовых возмущений. Мы видим, что для подавления винтовой неустойчивости продольное поле в соответствии с этим критерием должно быть достаточно сильным. Слабое продольное поле только ухудшает ситуацию в плане устойчивости, так как условие (4.90) может нарушаться.

Для систем с замкнутым плазменным шнуром, как это имеет место в тороидальной магнитной ловушке, например в токамаке (см. § 17), роль длины системы выполняет длина самого замкнутого шнура. Если его большой радиус равен R (см. рис. 2.6), то, подставив в (4.90) в качестве длины L длину окружности большого радиуса $2\pi R$, получим критерий устойчивости Шафранова – Крускала [23]:

$$q = \frac{h}{2\pi R} = \frac{a}{R}\frac{B_z}{B_\varphi} > 1 . \qquad (4.91)$$

где q – так называемый коэффициент запаса устойчивости

Применительно к токамакам, продольное поле B_z принято называть тороидальным, а поле тока B_φ – полоидальным. Согласно критерию Шафранова – Крускала тороидальное поле должно быть очень большим, если диаметр сечения шнура значительно меньше его длины по большому радиусу. В этом случае, оценивая величину полоидального поля тока плазменного шнура как

$$B_\varphi = \frac{2I}{ca},$$

можем записать критерий устойчивости как условие, ограничивающее допустимый ток в токамаке:

$$I < I_{max} = c\frac{a^2}{R}B_z . \qquad (4.92)$$

Это условие определяет одну из границ рабочей области для такой системы (так называемый предел по току).

Подчеркнем в заключение, что критерий Шафранова – Крускала является критерием глобальной устойчивости, т.е. устойчивости плазменного шнура в целом, и не гарантирует локальной устойчивости. Например, один из критериев локальной устойчивости (критерий Сайдема) записывается в виде

$$\frac{8\pi p'(r)}{B^2}(1-q^2)+\frac{1}{4}s^2 > 0, \quad p'(r) = \frac{dp}{dr}, \quad s = \frac{d}{dr}\ln q . \qquad (4.93)$$

Здесь последнее слагаемое – шир (или перекрещенность) силовых линий всегда оказывает стабилизирующее действие. Так как в поперечном сечении шнура давление плазмы $p(r)$ по мере удаления от центра убывает, то для устойчивости, при малом шире, должно быть $q>1$ в соответствии с критерием Шафранова – Крускала. Если окажется так, что на периферии плазменного шнура будет $q(a)>1$, то глобально шнур будет устойчив. Но если при этом в центре шнура окажется $q(0)<1$, то возможно развитие *внутренней винтовой моды*, вызывающей «выворачивание» шнура «наизнанку» и появление пилообразных колебаний его температуры, вследствие перемешивания горячей центральной и холодной периферийной плазмы шнура.

§ 37. Кинетические неустойчивости плазмы.

- **Механизм обратного поглощения Ландау.**

Кинетические эффекты становятся существенными, когда фазовая скорость волн оказывается порядка характерной скорости частиц плазмы. Одно из проявлений этих эффектов – бесстолкновительное затухание Ландау, приводящее к затуханию волн в максвелловской плазме. Наличие (или отсутствие) бесстолкновительного затухания определяется знаком производной по скорости от функции распределения в резонансной точке, задаваемой условием черенковского резонанса

$$\omega - \vec{k}\vec{v} = 0\,,$$

или, другими словами, затухание определяется соотношением количества частиц, скорость которых выше или ниже фазовой скорости волны. Если

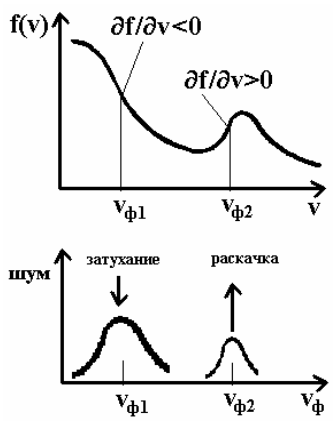


Рис. 4.22. Резонансное взаимодействие волн и частиц в плазме

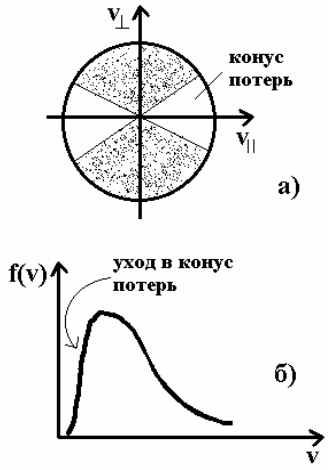


Рис. 4.23. Неравновесная функция распределения частиц в адиабатической ловушке

последних больше, то энергия волны поглощается (§ 33). При наличии в плазме интенсивного пучка частиц (см. рис. 4.22, «горб» на этом рисунке отвечает превышению числа частиц с соответствующей скоростью в пучке над числом частиц, соответствующих максвелловскому распределению), затухание резонансной волны может смениться раскачкой. В этом случае говорят об обратном механизме поглощения Ландау. Если скорость частиц пучка достаточно большая, то частоты резонансных волн будут велики, а длины волн – малы. В этом отношении такие неустойчивости, в отличие от МГД-неустойчивостей, преимущественно мелкомасштабные и, казалось бы, не могут приводить к глобальным последствиям. Мы уже знаем, однако, что наличие интенсивных шумов в плазме может приводить к эффективному увеличению частоты столкновений частиц (рассеяние на волнах), вызывающему аномальные эффекты в процессах переноса: аномально высокая скорость диффузии и теплопроводность, аномально большое сопротивление плазмы и т.п.

Итак, кинетические неустойчивости есть следствие отступления от равновесной, максвелловской функции распределения. Неравновесные условия могут реализоваться не только при наличии пучка. Например, в адиабатической ловушке (§ 33) функция распределения «обедняется» за счет ухода медленных частиц в опасный конус потерь (рис. 4.23). Это создает благоприятные условия

для раскачки разновидностей «конусных» неустойчивостей (например, одна из наиболее опасных – *дрейфово–конусная неустойчивость* [12]), ограничивающих время жизни плазмы в ловушке.

Причиной неустойчивости может быть и наличие потоков плазмы, если найдется подходящая волна с фазовой скоростью, близкой к скорости потока. Именно такова может быть ситуация при наличии систематических дрейфовых потоков плазмы (§ 17). Например, скорость ларморовского дрейфа, обязанного своим происхождением неоднородности плотности замагниченной плазмы, по порядку величины составляет

$$v_{\partial p} \sim v_T \, \rho_B / L \,,$$

где L – характерный размер неоднородности. С этой скоростью можно связать частоту соответствующей дрейфовой волны. Если, например, $B||z$, $\nabla n||x$, то волна распространяется в направлении оси y:

$$\omega = k_y v_{\partial p} \,.$$

- **Пучковая неустойчивость**

Одним их простейших примеров кинетической неустойчивости является неустойчивость пучка электронов, пронизывающего плазму.

Рассмотрим наиболее простой случай раскачки продольных волн, когда через холодную плазму ($T_e \to 0$, $T_i \to 0$) $n_{oi}=n_{oe}=n_o$, проходит холодный пучок электронов ($v_{no} \neq 0$, $n_{no} \neq 0$) малой плотности. Дисперсионное уравнение для этого случая записывается в виде:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{Le}^2 + \omega_{Li}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_n^2}{(\omega - k v_{no})^2} = 0 \,. \qquad (4.94)$$

Первые два слагаемых здесь отвечают холодной плазме (см. § 29), а последнее описывает вклад холодного пучка электронов. Здесь ω_{Le}, ω_{Li} и ω_n – ленгмюровские частоты для электронов плазмы, ионов плазмы и электронов пучка соответственно, v_n – скорость электронов пучка.

Это полное уравнение 4-й степени, приводимое к канонической форме. Приближенное решение его было предложено Я.Фейнбергом из довольно наглядных физических соображений. Известно, что при прохождении пучка через плазму возникают (точнее, могут возникать при определенных условиях) колебания с нарастающей во времени амплитудой. Развивается так называемая *пучковая неустойчивость*. Она является частным случаем неустойчивостей, обусловленных наличием участков с положительной производной части функции распределения. Из рис. 4.22 видно, что с волной взаимодействуют частицы плазмы, скорость которых близка к скорости волны $v_{ф2}$. Кажется, возникает противоречие: сначала приняли $T_e \to 0$, а теперь должны принять, что часть электронов плазмы имеют тепловую скорость, близкую к фазовой скорости волны. Но условие $T_e \to 0$ еще не значит, что температура тождественно равна нулю (такого не бывает), а обозначает только, что скорости, приобретаемые в электрических полях, много больше тепловых. Следовательно, противоречия нет. Однако в нашем случае пренебрежем вкладом $\omega_{Li}^2 << \omega_{Le}^2$, и будем рассматривать $\omega \to \omega_n \to k v_{no}$. Так как, по предположению, плотность пучка мала, $n_n << n_o$, то примем

$$\omega \cong \omega_{Le} + \delta\omega \cong k v_{no} + \delta\omega, \quad |\delta\omega| << \omega_{Le} \,. \qquad (4.95)$$

Подставляя это в (4.94) и разлагая в ряд по малой величине, получим $1 - 2\dfrac{\delta\omega}{\omega_{Le}} + \dfrac{\omega_n^2}{\delta\omega^2} = 1$,

т.е. кубическое уравнение

$$2\delta\omega^3 - \omega_n^2 \omega_{Le} = 0 \,. \qquad (4.96)$$

Это уравнение всегда имеет решение с положительной мнимой частью, что и дает величину инкремента (скорости роста) возмущений:

$$\delta\omega = i\gamma, \quad \gamma \cong \left(\frac{1}{2}\omega_n^2\omega_{Le}\right)^{1/3} = \omega_{Le}\left(\frac{n_{no}}{n_o}\right)^{1/3}. \qquad (4.97)$$

Поскольку возмущения всех величин ($n_e, \vec{v}_e, n_n, \vec{v}_n, \vec{E}$) пропорциональны $e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}$, то они будут увеличиваться пропорционально $e^{\gamma t}$. Величина γ называется *инкрементом* и определяет скорость нарастания амплитуды волны во времени. Заметим также, что возмущения для этой неустойчивости являются сносовыми (увлекаются пучком), так как решение имеет ненулевую действительную часть частоты. Важно отметить также, что изложенное приближенное решение позволяет оценить лишь величину максимального инкремента неустойчивости. Между тем, уже из самого уравнения (4.94) очевидно, что короткие волны, для которых $|k| >> \omega_{Le}/v_{no}$, раскачиваться не могут. Другими словами, неустойчивость имеет коротковолновый порог, как можно показать, равный

$$|k_{no\,пор}| = 2(\omega_{Le}/v_{no})\left[1 + \left(n_n/n_0\right)^{2/3}\right]^{3/2} \cong 2(\omega_{Le}/v_{no}). \qquad (4.98)$$

Порог, как мы видим, определяется величиной формально похожей на дебаевский радиус, однако вместо тепловой скорости, которая в нашем случае равна нулю, входит скорость частиц пучка.

Для других пучковых неустойчивостей инкременты будут другими. Например, для *бунемановской (токовой) неустойчивости* относительного движения ионов и электронов, описываемой сходным с (4.94) уравнением

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{Le}^2}{(\omega - kv_{eo})^2} - \frac{\omega_{Li}^2}{\omega^2} = 0, \qquad (4.99)$$

максимальный инкремент, как можно показать, будет зависеть от отношения масс электронов и ионов

$$\gamma \approx \omega_{Le}\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3}. \qquad (4.100)$$

Эта неустойчивость также пороговая, однако, в отличие от предыдущего случая, сноса нет и фактически это стоячие апериодически нарастающие возмущения.

При наличии пучков неустойчивости всегда имеют возможность развиваться, естественно, при условии преодоления порога, если в спектре шумов плазмы найдется возмущение с подходящей длиной волны.

ГЛАВА 5

ЭЛЕКТРОННАЯ И ИОННАЯ ОПТИКА

§38. Аналогия световой и электронной оптики

Физическим обоснованием возможности построения аналогии прохождения электронного луча в электрическом поле с постепенно изменяющимся потенциалом и прохождения светового луча через среду с изменяющимся коэффициентом преломления (*оптико-механическая аналогия*) является общее сходство между обычной механикой и геометрической оптикой. И для движения материальной точки и для светового луча известен вариационный принцип Гамильтона: $\delta\int_{t_0}^{t_1} L dt = 0$, где t_0 и t_1 время в начальной и конечной точках траектории, $L(q, \dot{q}, t)$ – функция Лагранжа является функцией обобщенных координат, скоростей и времени.

Равенство нулю вариации интеграла означает, что этот интеграл, взятый вдоль действительной траектории, имеет экстремум (минимум) по сравнению с другими возможными виртуальными траекториями (рис. 5.1). Функция Лагранжа для материальной частицы равна разности между кинетической и потенциальной энергией $L = T - U$, для электрона, движущегося в чисто электростатическом поле $L = mv^2/2 - (-e\varphi)$. В присутствии магнитного поля $\vec{B}$ функция Лагранжа $L = mv^2/2 - (-e\varphi) + (-e\vec{A}\vec{v}/c)$, где $\vec{A}$ - векторный потенциал магнитного поля: $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$. Если ввести обобщенный импульс $\vec{P} = \vec{p} - \frac{e}{c}A\vec{l}$, где $\vec{l}$ - единичный вектор, направленный по касательной к траектории, то вариационный принцип Гамильтона $\delta S = 0$, называемый *принципом наименьшего действия* или принципом Мопертюи (интеграл $S = \int_{t_0}^{t_1} L dt$ называется *интегралом действием*, или просто *действием*) можно представить в виде: $\delta\int_A^B \vec{P}d\vec{l} = 0$. Этот принцип аналогичен принципу Ферма геометрической оптики: $\delta\int_A^B ndl = 0$, который означает минимальность оптической длины на реальном пути света. То есть оптический путь $\int_A^B ndl$ для светового луча – самый короткий, где n – показатель преломления среды, dl – элемент траектории луча. Если n = const, то преломление луча отсутствует и свет распространяется прямолинейно. Из принципа Ферма вытекает известный закон преломления Снеллиуса, который задает соотношение между углом

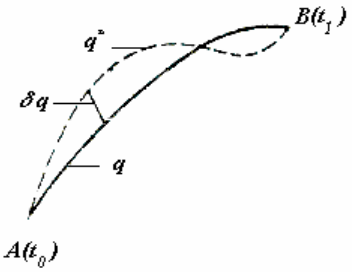


Рис. 5.1. Действительная и виртуальная траектория частицы

падения α и углом преломления β (углы между лучом и нормалью к границе раздела): $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{n_2}{n_1}$, где n_1 и n_2 – коэффициенты преломления сред [27].

В случае электронов их компонента скорости, перпендикулярная электрическому полю, не меняется, а модуль скорости пропорционален $\sqrt{U}$, где U – потенциал относительно точки, в которой скорость электрона равна нулю. Поэтому в электронной оптике $\sqrt{U}$ играет роль показателя преломления среды, а закон преломления имеет вид:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sqrt{U_2}}{\sqrt{U_1}}, \qquad (5.1)$$

если считать, что на границе раздела потенциал скачком меняется от U_1 до U_2.

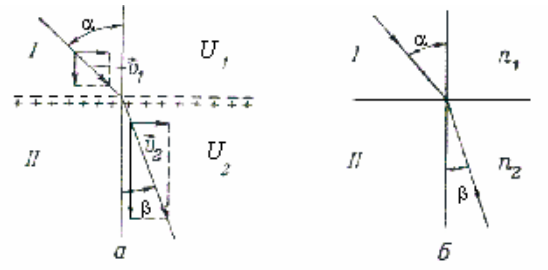


Рис. 5.2. Преломление пучка заряженных частиц на границе потенциалов (*а*) и света на границе двух сред (б)

Резкий скачок потенциала на пути электронного пучка можно создать между двух металлических сеток с мелкими ячейками на близком расстоянии друг от друга, на которые поданы напряжения U_1 и U_2 (рис. 5.2). Таким образом по аналогии со световой оптикой можно говорить об электронных лучах, а также определить условие геометрической оптики для электронов: длина волны электрона $\lambda[\dot{A}]=\frac{h}{mv}\approx\frac{12.25}{\sqrt{U[эВ]}}$ мала по сравнению с характерным размером неоднородностей системы, т. е. электрон можно рассматривать как частицу. Но у электронной оптики есть и существенные отличия от световой, они в основном состоят в следующем:

1. Отдельные лучи в световой оптике независимы – электронные лучи взаимодействуют друг с другом.
2. Показатель преломления для электронов всегда непрерывен, для света он, как правило, меняется скачком.
3. Диапазон изменения показателя преломления для электронов не ограничен, в оптике $n \le 2.5$.
4. Скорость электронов тем больше, чем больше показатель преломления, а скорость света наоборот.
5. Преломляющие поверхности для электронов, в отличие от световых лучей, не могут быть произвольными – распределение потенциалов всегда удовлетворяет уравнению Лапласа (линейная электронная оптика) или Пуассона (нелинейная электронная оптика).

§39. Электростатические линзы

Движение электронов, зависящее от распределения потенциала в пространстве, в общем случае возможно рассчитать лишь численными методами. Однако в отдельных случаях распределения потенциала возможно аналитическое решение, например, в случае аксиально-симметричного

распределения потенциал $U(z,r)$ не зависит от азимутального угла θ. Так как $U(z,-r) = U(z,r)$, то в разложении U по степеням r будут только четные степени:

$$U(z,r) = b_0(z) + b_2(z)r^2 + b_4(z)r^4 + \ldots + b_{2k}(z)r^{2k} + \ldots \qquad (5.2)$$

Подставляя это выражение в уравнение Лапласа (нет зарядов в промежутке) в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \qquad (5.3)$$

(уравнение упрощено с учетом $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 0$), можно найти коэффициенты разложения, получив в итоге распределение потенциала в пространстве в виде:

$$U(z,r) = U(z) - (\frac{r}{2})^2 U''(z) + \frac{1}{2^2}(\frac{r}{2})^4 U^{IV}(z) + \ldots + (-1)^k \frac{U^{(2k)}(z)}{(k!)^2 2^{2k}} + \ldots, \qquad (5.4)$$

которое полностью определяется распределением потенциала на оси системы $U(z) = U(0,z)$. Это сильно упрощает расчет движения электронов. Для приосевых электронов ($r^2/L^2_{\text{хар}} << r/L_{\text{хар}}$, где $L_{\text{хар}}$ – характерная длина системы), которые еще называют *параксиальными*, можно получить уравнение траектории. Для этого в распределении потенциала пренебрегаем слагаемыми со степенями r, тогда уравнения движения электрона:

$$m\ddot{z} = -eE_z = eU'(z) \quad \text{и} \quad m\ddot{r} = -eE_r = -erU''(z). \qquad (5.5)$$

Последнее уравнение замечательно тем, что в полях с аксиальной симметрией радиальная фокусирующая или расфокусирующая сила пропорциональна удалению частицы от оси. Учитывая, что левые части уравнения содержат производные по времени, а правые производные по z, можно использовать переход к производной по переменной z: $\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dz}(\frac{dz}{dt})^2$. Тогда, интегрируя первое уравнение с учетом граничного условия при $z = 0$ $U(z) = 0$ и $dz/dt\,|_0 = 0$ (пренебрегаем начальной скоростью частиц), получим $dz/dt = \sqrt{2eU(z)/m}$. Используя это соотношение для интегрирования второго уравнения и переходя к производной по z: $\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dz}{dt}\frac{d}{dz}(\frac{dr}{dz}\frac{dz}{dt})$, получим уравнение траектории $r(z)$ параксиального пучка:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{U'(z)}{2U(z)}\frac{dr}{dz} + \frac{U''(z)}{4U(z)}r = 0 \qquad (5.6),$$

которое называется *основным уравнением электронной оптики*. Полученное линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно $U(z)$ и $r(z)$ показывает, что возможно масштабное моделирование, т. е. если

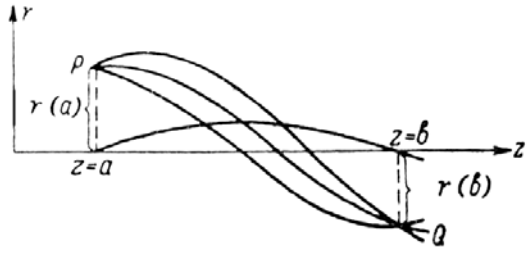


Рис. 5.3. Изображение точки в линзе.

потенциал во всех точках пространства увеличить в k раз (увеличить потенциал на всех электродах системы в одинаковое число раз), то уравнение, а следовательно и траектория электрона не изменится. Кроме того, уравнение не содержит отношения e/m, поэтому траектории электронов и ионов не отличаются.

Если предметная плоскость находится при $z = a$, а плоскость изображения при $z = b$ (рис. 5.3), то линейное увеличение линзы: $M = \dfrac{r(b)}{r(a)}$, где $r(a)$ и $r(b)$ расстояние до траектории от оси системы. Угловое увеличение линзы, определяемое как отношение тангенсов углов наклона траектории к оси $G = \dfrac{tg\gamma_2}{tg\gamma_1} = \dfrac{r'(b)}{r'(a)}$ (рис. 5.4). Из основного уравнения электронной оптики можно получить соотношение между линейным и угловым увеличением линзы[28]:



Рис. 5.4. Углы, образуемые траекторией с осью в предметной плоскости и точке

$$M \cdot G = \frac{\sqrt{U(a)}}{\sqrt{U(b)}}, \qquad (5.7)$$

которое является аналогом теоремы Лагранжа-Гельмгольца для световой оптики: $M \cdot G = \dfrac{n_1}{n_2}$.

Фокусные расстояния слева f_1 и справа f_2 от главных плоскостей h_1 и h_2 электронной линзы можно определить через траектории, проходящие через фокус линзы r_1 и параллельно оси r_2 системы (рис. 5.5): $f_1 = \dfrac{r_1(b)}{r_1'(a)}$, $f_2 = \dfrac{r_2(a)}{r_2'(b)}$.

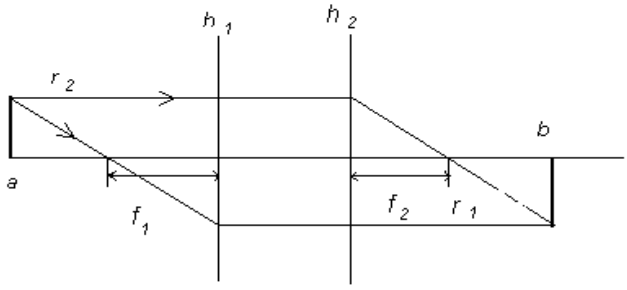


Рис. 5.5. Ход главных лучей в электростатической линзе

Тонкие электростатические линзы

Рассмотрим тонкие линзы, главные плоскости которых находятся при $z = a$ и при $z = b$. Для тонких линз расстояние между главными плоскостями много меньше фокусных расстояний (b - a) << f_1, f_2 , т. е. главные плоскости сливаются, фокусные расстояния слева и справа определяются соответственно соотношениями:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{4\sqrt{U(a)}} \int_a^b \frac{U''(z)}{\sqrt{U(z)}} dz \quad \text{и} \quad \frac{1}{f_2} = \frac{1}{4\sqrt{U(b)}} \int_a^b \frac{U''(z)}{\sqrt{U(z)}} dz . \qquad (5.8)$$

Отношение фокусных расстояний: $\frac{f_1}{f_2} = -\frac{\sqrt{U(a)}}{\sqrt{U(b)}}$.

Оптическая сила:

$$D = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{4\sqrt{U(b)}}\left(\frac{U'(b)}{\sqrt{U(b)}} - \frac{U'(a)}{\sqrt{U(a)}}\right) + \frac{1}{8\sqrt{U(b)}}\int_a^b \frac{(U'(z))^2}{U^{3/2}(z)}\,dz\,. \qquad (5.9)$$

Если электрическое поле справа и слева от линзы равно, то D > 0, т. е. линза всегда собирающая.

Для одиночной диафрагмы с круглым отверстием:

$$D = \frac{1}{f_d} = \frac{E_1 - E_2}{4U_d}, \qquad (5.10)$$

где E_1 и E_2 – напряженности электрических полей слева и справа от диафрагмы, U_d – потенциал диафрагмы.

Для системы из двух линз – диафрагм с фокусами f_1 и f_2 и расстоянием между линзами l оптическая сила задается соотношением:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{l}{f_1 f_2}. \qquad (5.11)$$

В общем случае аксиально-симметричного поля траектория электрона описывается уравнениями:

$$\begin{cases} m\ddot{r} = -eE_r \approx -\dfrac{er}{2}U''(z) \\ m\ddot{z} = -eE_z \approx eU'(z) \end{cases}, \qquad (5.12)$$

т.е. фокусирующая сила определяется знаком второй производной от потенциала на оси системы. Если $U''(z) > 0$, то система фокусирующая, если $U''(z) < 0$, то расфокусирующая.

§40. Магнитные линзы

Фокусировку пучков в аксиально-симметричном магнитном поле проще всего продемонстрировать на примере параксиального пучка электронов, скорость которых вдоль оси системы много больше скорости в радиальном направлении $v_z >> v_r$. На электрон в магнитном поле действует сила Лоренца $\vec{F} = -\frac{e}{c}\vec{v} \times \vec{B}$. Радиальная составляющая этой силы является фокусирующей: $F_r = -(e/c)v_\varphi B_z$ (рис.5.6). Азимутальная

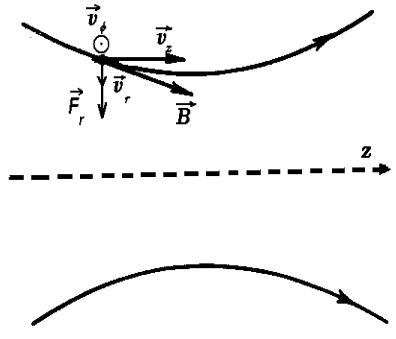


Рис. 5.6. Фокусировка в аксиально-симметричном магнитном поле

составляющая скорости электрона появляется за счет азимутальной составляющей силы Лоренца: $F_\varphi = -(e/c)(v_z B_r + v_r B_z) \approx -(e/c)v_z B_r$, так как $v_z >> v_r$. Составляющая скорости v_z не меняет знака, радиальная составляющая магнитного поля B_r может менять знак, при этом азимутальная составляющая скорости электрона v_φ будет уменьшаться (вращение замедляться), но направление вращение никогда не меняется, поэтому фокусирующая составляющая силы Лоренца F_r всегда сохраняет знак. Таким образом, магнитная линза всегда собирающая.

С учетом теоремы Гаусса, дающей соотношения между продольной B_z и радиальной компонентами B_r аксиально-симметричного магнитного поля $\vec{B}(B_z,B_r)$ $B_r = -(r/2)(dB_z/dz)$, движение электронов вдоль оси описывается уравнением:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{e^2}{4m^2c^2} r^2 B_z \frac{dB_z}{dz^2} . \qquad (5.13)$$

Азимутальное движение (поворот) описывается уравнением:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{eB_z}{2mc} \qquad (5.14)$$

(ларморовское вращение), т. е. угловая скорость всех электронов одинакова и изображение вращается как целое, причем, направление вращения зависит от направления магнитного поля. Если магнитное поле удовлетворяет условию: $\int_a^b B_z(z)dz = 0$, то вращение изображения будет отсутствовать. Учитывая, что для параксиальных пучков $v_z >> v_r$ (в приближении $\frac{mv^2}{2} \approx U_0$), движение по радиусу задается уравнением:

$$\frac{d^2 r}{dz^2} = -\frac{eB_z^2}{8mc^2 U_0} r , \qquad (5.15)$$

где U_0 – энергия электронов. Данное уравнение описывает траекторию в плоскости, которая вращается с ларморовской частотой. Как видно из уравнений движения, траектория электрона полностью определяется значением магнитного поля на оси B_z. В уравнения входят заряд и масса, следовательно, разные частицы движутся по разным траекториям. Уравнения линейны и однородны относительно расстояния от оси r, следовательно, любое аксиально-симметричное поле способно создать изображение и является линзой.

Для тонкой магнитной линзы (магнитное поле на оси быстро падает по мере удаления от линзы) оптическая сила:

$$\frac{1}{f} = \frac{e}{8mc^2 U_0} \int_a^b B_z^2 dz \text{ или } \frac{1}{f}[\frac{1}{см}] = \frac{0.022}{U_0[эВ]} \int_a^b B_z^2[Гс]dz . \qquad (5.16)$$

Угол поворота в магнитной линзе

$$\varphi(z)=\frac{1}{c}\sqrt{\frac{e}{8mU_0}}\int_a^b B_z dz \quad \text{или} \quad \varphi[рад]=\frac{0.15}{\sqrt{U_0[эВ]}}\int_a^b B_z[Гс]dz\,. \qquad (5.17)$$

Для магнитного витка с током I радиуса R магнитное поле $B_z=\dfrac{B_m}{(1+\dfrac{z^2}{R^2})^{3/2}}$, где B_m – поле в центре витка (формула Био-Савара). Интегрируя (5.16), можно найти фокусное расстояние для одного токового витка:

$$f[см]\approx 96.8\frac{U_0[эВ]R[см]}{I^2[A]}\,. \qquad (5.18а)$$

Для катушки из N витков:

$$f[см]\approx 96.8\frac{U_0[эВ]R[см]}{(NI[A])^2}\,. \qquad (5.18б)$$

Угол поворота:

$$\varphi[рад]\approx 10.7\frac{NI[A]}{\sqrt{U_0[эВ]}}\,. \qquad (5.19)$$

Для экранированной линзы $f_э = kf$, где k – поправочный коэффициент, k = 0.5÷0.7.

§41. Отклоняющие и фокусирующие электронно-оптические системы

Отклонение и фокусировка заряженных частиц в электрическом и магнитном полях широко используется для создания и диагностики плазмы, а также для исследования процессов взаимодействия плазмы с твердым телом. Рассмотрим некоторые из таких систем.

Электростатические энергоанализаторы

Наиболее простой является система в виде плоского конденсатора. Если пучок частиц запускается параллельно пластинам (рис. 5.7), то угол отклонения пучка α зависит от энергии частиц U_0:

$$\alpha(U_0) = \Delta U l_E/(2U_0 d), \qquad (5.20)$$

где ΔU - разность потенциалов, приложенная к пластинам, l_E - длина пластин вдоль движения пучка, d - расстояние между пластинами. Благодаря различным значениям потенциала на верхней и нижней границе пучка, а значит и различным скоростям частиц, происходит фокусировка пучка.

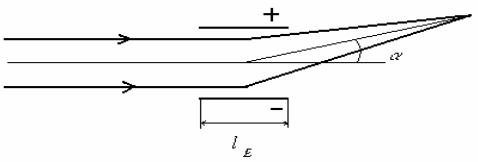


Рис. 5.7. Фокусировка в электростатическом поле плоского конденсатора

Хорошую фокусировку позволяет получить цилиндрический конденсатор (рис. 5.8). Электрическое поле цилиндрического конденсатора обратно

пропорционально радиусу $E(r) = a/r$, интегрируя уравнение $dU(r)/dr = a/r$, можно найти коэффициент $a = (U_2 - U_1)/\ln(R_2/R_1)$, а значит $E(r) == (U_2 - U_1)/(r\ln(R_2/R_1))$, где U_1, U_2, R_1, R_2 – потенциалы и радиусы внутреннего и внешнего цилиндра соответственно. Через узкую выходную щель будут «успешно» проходить только частицы, имеющие круговые траектории и скорости, удовлетворяющие условию: $mv^2/r = qE$ (остальные попадут на стенки цилиндра), т. е. частицы, имеющие кинетическую энергию:

$$U_0[\text{эВ}] = q(U_2 - U_1)/(2\ln(R_2/R_1)). \qquad (5.21)$$

Для решения уравнения движения для некруговых траекторий в полярных координатах: $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{qa}{mr}$, с учетом постоянства секторальной скорости $r^2\dot{\varphi} = const$, удобно рассмотреть отклонение u траектории от круговой: $r = r_0 + u$ ($u << r$), где r_0 - радиус, на котором пучок частиц влетает в конденсатор. Тогда уравнение движения можно представить в виде: $\ddot{u} + 2\omega_0^2 u = 0$, где $\omega_0^2 = (qa)/(mr_0^2)$, решение которого представляет собой колебания около круговой траектории с периодом $2\pi/\sqrt{2}$, то есть после поворота на угол $\pi/\sqrt{2} = 127.3^\circ$ пучок фокусируется на круговой траектории (фокусировка по Юзу и Рожанскому).

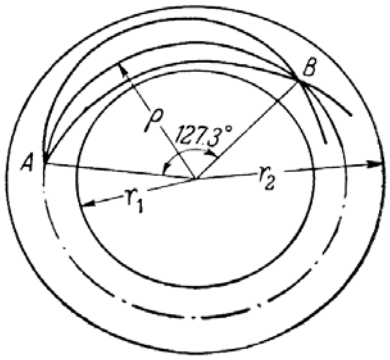


Рис. 5.8. Фокустровка в цилиндрическом конденсаторе

Магнитные масс-сепараторы и энергоанализаторы

Благодаря зависимости радиуса вращения в магнитном поле $r_л = \frac{vmc}{eB}$ (ларморовского радиуса) от скорости v и массы m заряженной частицы, возможно их разделение (сепарация) по энергиям и массам, а также фокусировка как в поперечном, так и в продольном однородном магнитном поле. В поперечном магнитном поле наиболее распространенной является схема с полукруговой фокусировкой (рис. 5.9). Выходящий из точечного источника A перпендикулярно силовым линиям пучок моноэнергетических частиц будет фокусироваться после полуоборота на расстоянии $2r_л$. Фокусировка частиц, вылетевших под одинаковым углом α к центральной траектории пучка, происходит благодаря тому, что круговые траектории частиц имеют одинаковые радиусы, и их траектории опираются на диаметры, расположенные под тем же углом 2α, что и касательные к траекториям в начальной точке.

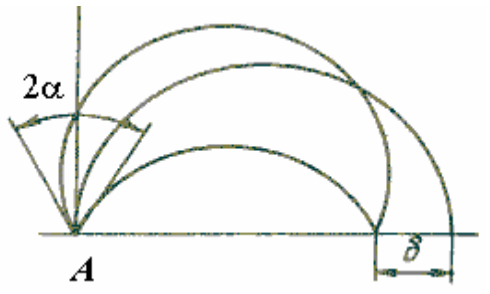


Рис. 5.9. Фокусировка в однородном магнитном поле

Ширина щели δ, необходимая для прохождения всего пучка, зависит от расходимости 2α входящего пучка: $\delta = 2r_л(1-\cos\alpha)$. В секторных масс-спектрометрах с однородным магнитным полем (рис. 5.10) фокусировка осуществляется за счет того, что длина траектории в магнитном поле для частиц, находящихся на разном расстоянии от центра сектора, различна. Фокусное расстояние такой системы зависит от угла сектора φ и расстояния от источника до границы поля. Если траектория осевых частиц пучка на входе и выходе из сектора перпендикулярна его границе (центр вращения осевых частиц совпадает с центром сектора), то расчеты показывают, что фокусировка происходит на границе влета пучка в систему, т. е. $\varepsilon_1 + \varphi + \varepsilon_2 = 180^o$ (рис. 5.10).

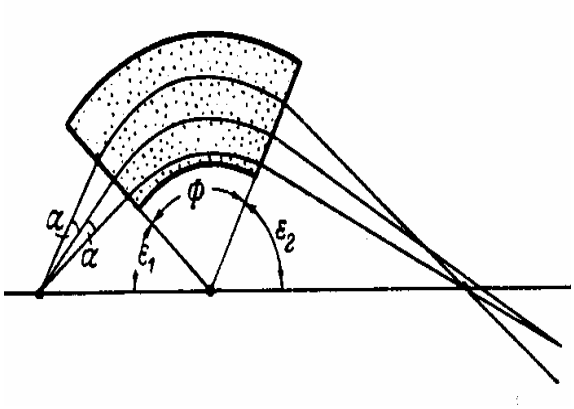


Рис. 5.10. Секторный магнитный масс-сепаратор

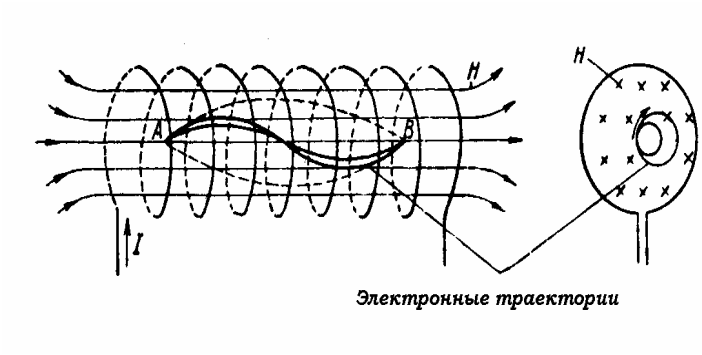


Рис. 5.11. Фокусировка в однородном продольном магнитном поле

В продольном однородном магнитном поле фокусировка происходит в силу того, что вышедшие из одной точки частицы после совершения одного оборота по ларморовской окружности возвращаются на исходную силовую линию магнитного поля (рис. 5.11). Проекция движения частиц на перпендикулярную к силовым линиям плоскость представляет собой пучок окружностей, имеющих общую точку. Если угол расходимости пучка α невелик, то фокусировка моноэнергетического пучка произойдет через один оборот на расстоянии $l = \tau_л v\cos\alpha \approx 2\pi mvc/(eB)$, где $\tau_л = 2\pi mc/(eB)$ – период вращения по ларморовской окружности. Таким образом, расстояние до места фокусировки пучка зависит от скорости и массы частиц, и продольное однородное магнитное поле может быть использовано для энерго- и масс-сепарации частиц.

Электронные и ионные пушки

В большинстве электронных пушек источником электронов служит термокатод (вольфрамовый, оксидный и т.п.) (рис. 5.12).

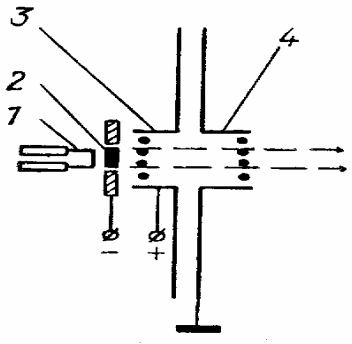


Рис. 5.12. Электронная пушка: 1 – нить накала, 2 – катод, подогреваемый нитью накала, 3 – управляющий электрод с сеткой, 4 – анод с сеткой.

Фокусировка пучка и управление его интенсивностью осуществляется управляющим (или фокусирующим) электродом. Анодом является диафрагма, между которой и катодом может прикладываться напряжение от единиц до сотен киловольт. На управляющий электрод подается отрицательное относительно катода напряжение до 500 В. Управление уже сформированного электронного пучка может осуществляться с помощью отклоняющей системы, как это происходит в электронно-лучевых трубках телевизоров и мониторов.

Принцип работы ионной пушки подобен электронной. Существует большое множество разнообразных конструкций ионных пушек (ионных источников). В них используются различные способы создания ионов, например, термоионная эмиссия, ионизация газа или паров вещества электронным ударом. Наиболее эффективными источниками ионов являются плазменные, в которых создается газоразрядная плазма, а ионы вытягиваются электрическим полем с ее границы. Примером может служить весьма распространенный источник ионов типа дуоплазматрон (рис. 5.13), в котором электрический разряд формируется между катодом и промежуточным анодом. Коническая форма промежуточного анода приводит к сжатию плазмы в районе выходного отверстия. Неоднородное магнитное поле, создаваемое катушкой между промежуточным анодом и анодом, приводит к дополнительному сжатию плазменной струи. Диафрагма в месте наибольшего сжатия используется для повышения газовой экономичности источника за счет ограничения потока неионизованной компоненты рабочего вещества. Ионы вытягиваются из плазмы электродом, который стоит сразу после анода и на который подается отрицательный относительно анода потенциал. Диафрагма вытягивающего электрода является фокусирующей системой. Кроме того, граница плазмы, из которой вытягиваются ионы, является также электростатической линзой. Форма границы плазмы существенно влияет на расходимость формируемого в ионно-оптический системе ионного пучка. Меняя концентрацию плазмы (например, меняя ток разряда) при фиксированном ускоряющем напряжении, можно управлять формой плазменной границы. При большой концентрации плазмы граница выпуклая – пучок сильно расходится. Снижая концентрацию плазмы, можно создать плоскую ее границу, тогда расходимость может быть минимальной, а вытягиваемый из источника ток подчиняется закону «3/2» (см. § 42). При дальнейшем уменьшении концентрации плазмы граница становится вогнутой, и расходимость пучка вновь возрастает. Расчет параметров фокусировки пучка с учетом границы плазмы является достаточно сложной задачей и возможен лишь численными методами.

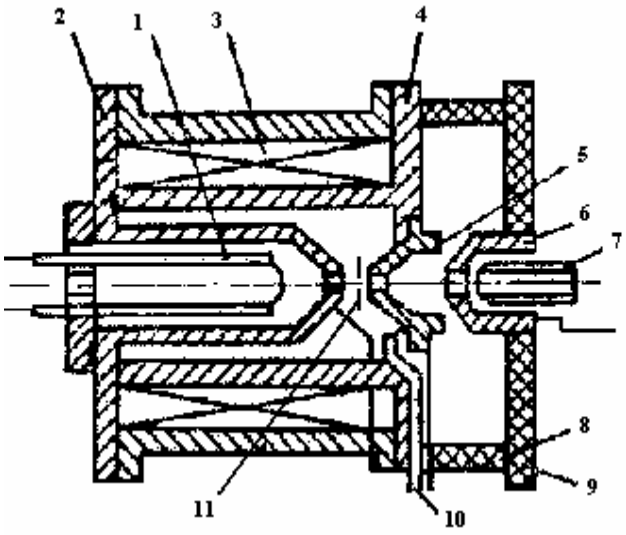


Рис. 5. 13. Источник ионов типа дуоплазматрон: 1 – катод с накаливаемой нитью, 2 – промежуточный электрод, 3 – катушка для создания магнитного поля, 4 – анод, 5 - анодная вставка, 6 – вытягивающий электрод, 7 – электростатическая линза, 8 – изолятор, 9 – фланец вакуумной камеры, 10 – трубка для натекания газа, 11 – диафрагма

Электронные микроскопы

Преимущество электронного микроскопа перед оптическим заключается в его гораздо большей разрешающей способности. Разрешающая способность оптического микроскопа ограничена невозможностью снижения дифракции лучей путем уменьшения длины волны из-за ограниченного диапазона длин волн видимого света. В электронных микроскопах возможно уменьшать длину волны де Бройля $\lambda = h/(mv)$ до нескольких ангстрем путем использования ускоряющих электроны высоких напряжений (до нескольких десятков и даже сотен кэВ). Схемы электронных микроскопов с магнитной и электростатической фокусировкой представлены на рис. 5.14. Исследуемый объект просвечивается пучком монохроматических электронов. Первичное изображение объекта попадает в фокальную плоскость проекционной линзы, которая дает увеличенное изображение объекта на экране. Одним из существенных требований к электронному микроскопу является поддержание в области линз высокого вакуума (порядка $10^{-4} \div 10^{-5}$ мм рт. ст.), так как при таких высоких напряжениях возможно возникновение электрического разряда, нарушающего необходимое распределение потенциала. Разрешающая способность электронного микроскопа ограничивается прежде всего хроматической и сферической аберрациями. Монохроматичность электронного пучка нарушается из-за колебаний ускоряющего напряжения и разброса энергий электронов, излучаемых накаленным катодом. В магнитном электронном микроскопе колебание силы тока в обмотке линз приводит к дополнительному размытию изображения. Кроме просвечивающих электронных микроскопов широкое распространение получили сканирующие электронные мокроскопы, в которых изображение формируется отраженными от исследуемого образца или вторичными электронами.

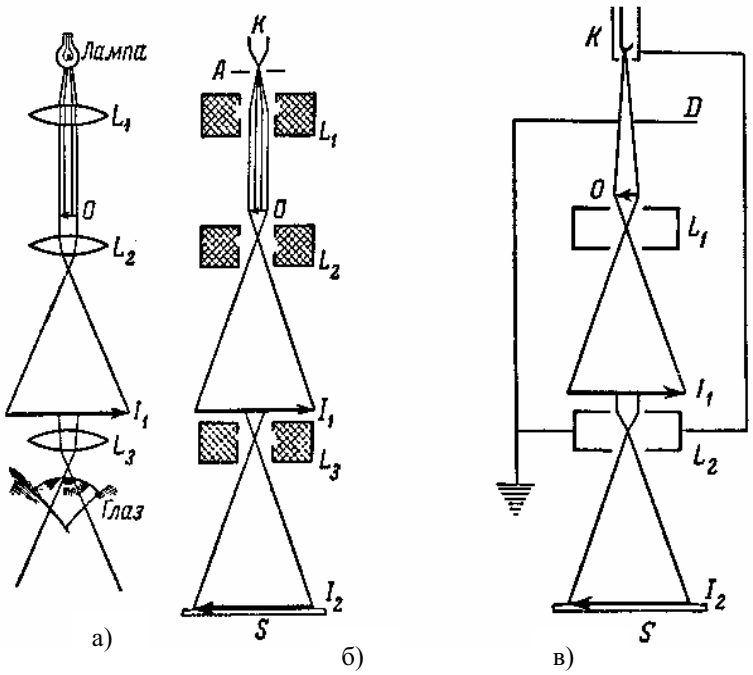


Рис. 5.14. Схемы оптического (а), магнитного (б) и электростатического (в) электронного микроскопа: K – источник электронов, O – объект, D –диафрагма, L_1, L_2, L_3 – линзы, I_1, I_2 – первичное и вторичное изображение, S – экран.

ГЛАВА 6

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА ЭЛЕКТРОННЫХ И ИОННЫХ ПУЧКОВ

§42. Ограничение тока пространственным зарядом в диоде

В промежутке длиной d между плоскими катодом и анодом распределение потенциала в вакууме линейно: $U(x)=U(a)\frac{x}{d}$ (это распределение является решением уравнения Лапласа $\Delta U = 0$). По мере увеличения плотности тока объемный заряд $\rho(x)$ в промежутке растет, изменяя распределение потенциала и приводя к возникновению вблизи поверхности катода потенциального барьера - «виртуального катода», от которого электроны отражаются обратно на катод (рис. 6.1). Для определения распределения потенциала в промежутке необходимо решать уравнение Пуассона $\Delta U = -4\pi\rho(x)$ с учетом того, что плотность тока в промежутке $j = -\rho v$. Если считать, что электроны эмитируются с катода с нулевой скоростью (тепловая энергия эмиссионных электронов много меньше энергии, приобретаемой в промежутке), то устойчивым является режим, когда «виртуальный катод» не образуется, а электрическое поле на поверхности катода равно нулю: $E = \left.\frac{dU}{dx}\right|_{x=0} = 0$. При таком граничном условии в режиме ограничения тока объемным зарядом решением уравнения Пуассона

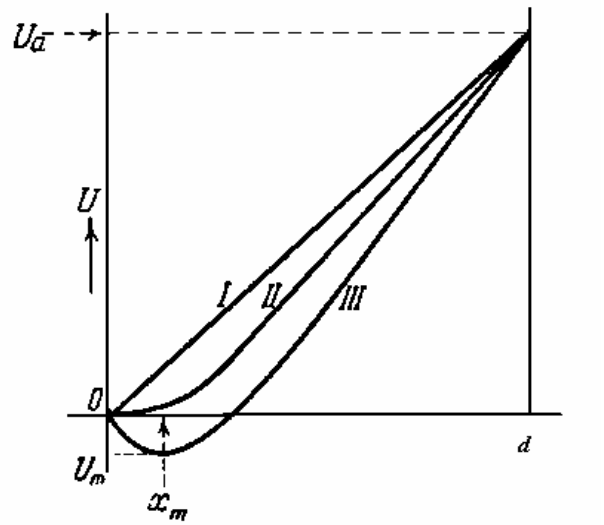


Рис. 6.1. Распределение потенциала в плоском диоде без влияния пространственного заряда (*I*), в режиме ограничения тока объемным зарядом (*II*) и в режиме возникновения виртуального катода (*III*)

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{4\pi j}{\sqrt{2e/m}}\frac{1}{\sqrt{U}} \qquad (6.1)$$

(здесь учтено, что при начальной нулевой скорости энергия электронов $mv^2/2 = eU$) является распределение потенциала в промежутке в виде:

$$U(x) = U(a)\left(\frac{x}{d}\right)^{4/3}. \qquad (6.2)$$

В этом случае плотность электронного тока, который можно пропустить через промежуток ограничена величиной, зависящей от напряжения на аноде U_a и от расстояния между катодам и анодом d:

$$j_{3/2}[A/см^2] = \frac{\sqrt{2}}{9\pi}\sqrt{\frac{e}{m_e}}\frac{U_a^{3/2}}{d^2} = 2.33\cdot 10^{-6}\frac{U_a^{3/2}[B]}{d^2[см]}. \qquad (6.3)$$

Это соотношение получило название закона *Чайльда-Ленгмюра*, или закона «3/2». Для ионного тока:

$$j_i[A/см] = \frac{\sqrt{2}}{9\pi}\sqrt{\frac{e}{M_i}}\frac{U_a^{3/2}}{d^2} = 5.46\frac{U_a^{3/2}[B]}{\sqrt{M_i[а.е.м.]}d^2[см]}. \qquad (6.4)$$

Если учитывать начальную скорость эмитированных электронов v_0, то уравнение Пуассона примет вид:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{4\pi j}{v_0\sqrt{1+2eU/(mv_0^2)}}, \qquad (6.5)$$

решением которого является зависимость

$$U(x) = (mv_0^2/2e)((\pm(x/x_m\text{-}1))^{4/3}\text{-}1), \qquad (6.6)$$

(здесь "+" при $x > x_m$, "-" при $x < x_m$). Около катода возникает «виртуальный катод» (потенциальный барьер) глубиной $eU_m=mv_0^2/2$ на расстоянии $x_m = \sqrt{\frac{mv_0^3}{18\pi ej}}$ от катода (рис.6.1).

Для цилиндрических диодов предельная плотность электронного тока так же зависит от напряжения на аноде, как степень «3/2», но зависимость от расстояния между катодом и анодом носит более сложный характер (как результат решения уравнения Пуассона в цилиндрических координатах) и описывается специальной функцией Богуславского $\beta(\frac{r_a}{r_k})$, где r_a и r_k – радиусы анода и катода соответственно:

$$J_{3/2} = \frac{2}{9\pi}\sqrt{\frac{2e}{m_e}}\frac{U_a^{3/2}}{r_a\beta^2(\frac{r_a}{r_k})}. \qquad (6.7)$$

Для полного тока, приходящего на анод, $I_{3/2}=J_{3/2}S_a$ ($S_a=2\pi r_a l_a$ – площадь анода.):

$$J_{3/2}[A] = \frac{1}{9\pi}\sqrt{\frac{2e}{m_e}}\frac{U_a^{3/2}S_a}{r_a^2\beta^2(\frac{r_a}{r_k})} = 2.33\cdot 10^{-6}\frac{U_a^{3/2}[B]S_a[см^2]}{r_a^2[см]\beta^2(\frac{r_a}{r_k})} \qquad (6.8)$$

- формула *Ленгмюра-Богуславского*. Значения функции Богуславского для широкого диапазона r_a/r_k можно найти в таблицах [29].

Распределение потенциала в промежутке описывается соотношением:

$$U(r) = U_a (\frac{r}{r_a})^{3/2} (\frac{\beta^2 (r/r_k)}{\beta^2 (r_a/r_k)})^{2/3} . \qquad (6.9)$$

Для сферического диода полный ток на анод I_a:

$$I_a[A] = \frac{4}{9}\sqrt{\frac{2e}{m_e}} \frac{U_a^{3/2}}{\alpha^2 (\frac{r_k}{r_a})} = 29.3 \cdot 10^{-6} \frac{U_a^{3/2}[B]}{\alpha^2 (\frac{r_k}{r_a})}, \qquad (6.10)$$

где $\alpha(r_a/r_k)$ – табулированная функция Ленгмюра [30]. Распределение потенциала между катодом и анодом:

$$U(r) = U(a)(\frac{\alpha(r_k/r)}{\alpha(r_k/r_a)})^2 . \qquad (6.11)$$

§43. Предельная плотность тока пучка частиц в пролетном промежутке в вакууме

Плотность тока заряженных частиц в пролетном промежутке между электродами с одинаковым потенциалом также ограничена из-за собственного объемного заряда и, соответственно, потенциала пучка. Рассмотрим эту задачу (*задачу Бурсиана*) на примере потока в пролетном промежутке длины d ионов массы M, ускоренных до этого в плоском диоде потенциалом U_0 (рис. 6.2). Распределение потенциала в промежутке задается уравнением Пуассона:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -\frac{4\pi j\sqrt{M/2e}}{\sqrt{U_0 - U}} . \qquad (6.12)$$

Устойчивое решение этого уравнения при граничных условиях $U(0) = U(d) = 0$ существует только при дополнительном граничном условии на поле [31]:

$$E|_0 = d\psi/d\xi|_0 < \sqrt{2} , \qquad (6.13)$$

где $\psi = U/U_0$, $\xi = x/r_d$, $r_d = \sqrt{Mv_0^2/(4\pi ne^2)}$ - *дебаевский радиус пучка*. Это условие соответствует условию на максимальную длину пролетного промежутка:

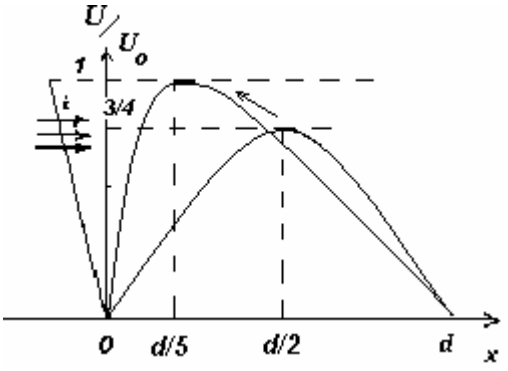


Рис. 6.2. Распределение потенциала в пролетном промежутке

$$d < (4\sqrt{2}/3) r_d = d_m \qquad (6.14).$$

Экстремальное значение d_m соответствует критическому значению максимума потенциала:

$$U_m = (3/4) U_0. \qquad (6.15)$$

При возрастании плотности ионного тока потенциал в пролетном промежутке будет возрастать до U_m, затем скачком возникает «виртуальный анод» с $U_m = U_0$, от которого произойдет отражение части ионов обратно в сторону источника, в результате чего ток на коллектор уменьшится в 4.5 раза. Таким образом, ток в пролетном промежутке ограничен током Бурсиана:

$$j_Б = \frac{8}{9\pi}\sqrt{\frac{2e}{M}}\frac{U_0^{3/2}}{d^2} = 8 j_{3/2}. \qquad (6.16)$$

Механизм неустойчивости Бурсиана связан с положительной обратной связью между частицами пучка и внешней электрической цепью, когда повышение потенциала пучка на малую величину автоматически вызывает дальнейшее его повышение. Эта связь возникает, когда дебаевский радиус пучка становится меньше расстояния между электродами. Точно такое же ограничение существует и для потока электронов в вакууме. Даже в случае скомпенсированного пучка электронов, когда пространственный заряд электронов в пролетном промежутке скомпенсирован ионами (*задача Пирса*), возникает ограничение на максимально возможную плотность тока из-за неустойчивости, также приводящей к образованию виртуального катода и запиранию пучка. Физическая причина *пирсовской* неустойчивости та же, что и неустойчивости Бурсиана, – положительная обратная связь электронов пучка с электронами внешней электрической цепи, которая возникает, если дебаевский радиус пучка становится меньше расстояния между электродами. Качественно эти неустойчивости сродни пучковой неустойчивости, при которой энергия направленного движения передается в энергию плазменных колебаний (см. §37). Условием устойчивости на длину пролетного промежутка в случае скомпенсированного потока является $d < \pi r_d$, а предельная плотность тока (ток Пирса) равна:

$$j_П = \frac{\pi}{4(1+(m/M)^{1/3})}\sqrt{\frac{2e}{m}}\frac{U_0^{3/2}}{d^2} \approx \frac{9\pi^2}{4} j_{3/2}. \qquad (6.17)$$

Расхождение пучков заряженных частиц под действием собственного объемного заряда

Основной проблемой транспортировки интенсивных пучков заряженных частиц является их расхождение под действием собственного объемного заряда. Для отыскания формы пучка необходимо решать уравнение Пуассона (для ленточного пучка двумерное):

$$\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} = -4\pi\rho(x,y), \qquad (6.18)$$

а также уравнение движения для граничной заряженной частицы. В случае бесконечного ленточного пучка (рис.6.3), у которого ширина значительно больше толщины 2X, для определения электрического поля на границе вместо уравнения Пуассона можно использовать теорему Гаусса о равенстве потока электрического поля через поверхность и заряда, заключенного в объеме,

ограниченном этой поверхностью. Тогда напряженность электрического поля на границе:

$$E_x = J/(2\varepsilon_0 v) = J(/2\varepsilon_0 \sqrt{2eU_0 / m}), \qquad (6.19)$$

где J – линейная плотность тока (ток на единицу ширины бесконечного ленточного пучка), U_0 – потенциал, которым был ускорен пучок до входа в пролетный промежуток. Решая уравнение движения $m\ddot{x} = eE_x$, получим профиль границы пучка, которая описывается зависимостью $x(z)$:

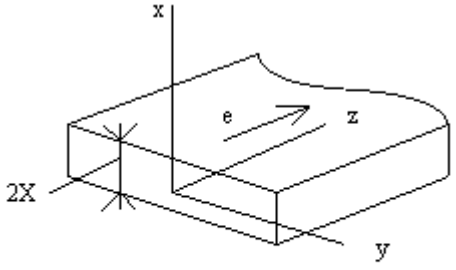


Рис. 6.3. Плоский электронный ленточный пучок

$$x = x_0 + tg\gamma z + pz^2/2\,, \qquad (6.20)$$

где $p = \dfrac{J}{4\varepsilon_0 \sqrt{\dfrac{2e}{m}} U_0^{3/2}}$, где γ - *угол сходимости* пучка на входе, т. е. угол между направлением скорости граничного электрона и направлением распространения пучка по оси z. Местоположение самого узкого в поперечном размере участка пучка, так называемого «кроссовера» $x_{кр}$, определяется из условия:

$$dx/dz = 0, \text{ т.е. } z_{кр} = tg\gamma/p. \qquad (6.21)$$

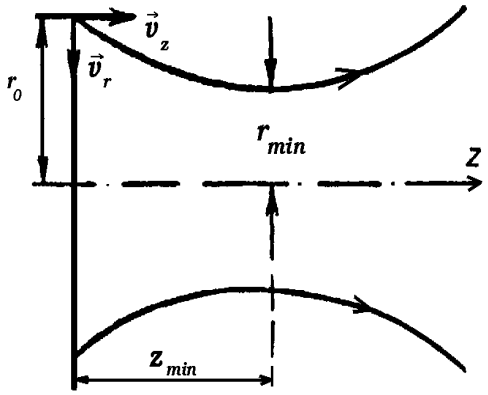


Рис. 6.4. Расходимость цилиндрического электронного пучка под действием собственного объемного заряда

Для цилиндрического пучка, влетающего в пролетный участок параллельно оси z с начальным радиусом r_0, зависимость радиуса пучка $r(z)$ задается соотношением:

$$\frac{z}{r_0} = \sqrt[4]{\frac{e}{2m}} \frac{U_0^{3/4}}{I^{1/2}} \int_1^R \frac{d\varsigma}{\sqrt{\ln \varsigma}} = 32.3 \frac{U_0^{3/4}[кВ]}{I^{1/2}[мА]} \int_1^R \frac{d\varsigma}{\sqrt{\ln \varsigma}}, \qquad (6.22)$$

где I – полный ток пучка, ускоренного потенциалом U_0, $R=r/r_0$ (числовой коэффициент дан для электронного пучка). Для сходящегося пучка, входящего в пролетный промежуток под углом γ к оси z (рис. 6.4):

$$\frac{z}{r_0} = \sqrt{\frac{2e}{m} U_0} \int_1^R \frac{d\varsigma}{\sqrt{\sqrt{\dfrac{8e}{mU_0}} I \ln \varsigma + \dfrac{2e}{m} U_0 \cdot tg^2 \gamma}}. \qquad (6.23)$$

Радиус пучка в наиболее узком месте (в кроссовере) определяется из соотношения: $\ln\frac{r_0}{r_{\min}} = \frac{U_0^{3/2}}{I}\sqrt{\frac{e}{2m}}tg^2\gamma \approx 1.04\cdot 10^3\frac{U_0^{3/2}[кВ]}{I[мА]}tg^2\gamma,$ (6.24)

где численный коэффициент дан для электронного пучка. При этом не была учтена сила Лоренца, действующая на движущуюся заряженную частицу в магнитном поле. В данном случае эта фокусирующая сила в собственном магнитном поле тока пучка будет существенна только при достаточно больших скоростях частиц.

Расхождение пучков ограниченных поперечных размеров следует учитывать не только в пролетных промежутках, но и в электронных или ионных пушках. Пирсом было показано, что можно подобрать форму окаймляющих пучок промежуточных электродов так, чтобы компенсировать расталкивающее действие объемного заряда пучка и сохранить прямолинейность его распространения (пушки Пирса). Для этого необходимо, чтобы для потенциала в пространстве вне пучка, удовлетворяющего в случае плоской геометрии уравнению Лапласа: $\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}=0$, на границе пучка выполнялось условие $dU/dy = 0$. Решение уравнение Лапласа с учетом этого условия и зависимости потенциала на оси $U(x)=U(a)(\frac{x}{d})^{4/3}$ позволяет определить требуемую геометрию электродов, которая для плоского случая задается уравнением:

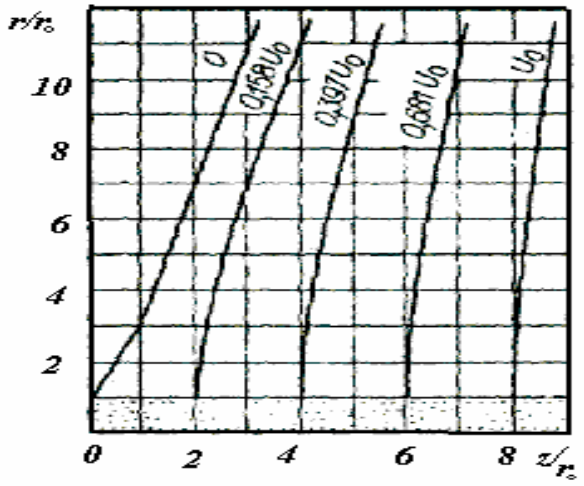


Рис. 6.5. Геометрия эквипотенциалей в пушке Пирса, формирующей параллельный пучок

$$(x^2+y^2)^{2/3}\cos(\frac{4}{3}arctg(y/x)) = U\ . \qquad (6.25)$$

Угол наклона плоскости катода ($U = 0$) к направлению распространения пучка $arctg(y/x) = 3\pi/8 = 67.5^o$. В случае цилиндрической геометрии численный расчет показывает, что угол наклона электрода, прилегающего к катоду, также составляет 67.5^o (рис .6.5).

ГЛАВА 7

ЭМИССИОННАЯ ЭЛЕКТРОНИКА

§44. Термоэлектронная эмиссия

Испускание электронов нагретыми проводящими материалами называется *термоэлектронной эмиссией*. Это явление было обнаружено в 1883 г. Эдисоном. Аналитический расчет плотности термоэмиссионного тока можно получить исходя из модели Зоммерфельда о нахождении электронов в металле как в потенциальной яме. Электроны в металле, каждый из которых можно описать волновой функцией:

$$\psi_k(\vec{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} \exp(i\vec{k}\vec{r}), \qquad (7.1)$$

где $L^3 = V$ – объем металла, волновой вектор $k = 2\pi/L$, подчиняются распределению Ферми-Дирака, т. е. среднее число частиц в одном состоянии

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp(\dfrac{E - E_F}{k_B T})}. \qquad (7.2)$$

При $T = 0$ все электроны находятся внутри сферы Ферми. С учетом того, что «плотность» электронов равна $1/h^3$, а также принципа Паули о двух возможных ориентациях спина, число электронов, «находящихся» в пределах сферы Ферми с радиусом k_F: $N = 2(1/h^3)(4/3)\pi p_F^3 V$. Импульс, который имеют электроны на сфере Ферми: $p_F = h(3n/8\pi)^{1/3}$, где $n = N/V$ – число электронов в 1 см^3. Энергия Ферми

$$E_F = p_F^2/(2m) = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3}. \qquad (7.3)$$

Количество частиц с энергией меньше E:

$$n(E) = \frac{1}{3\pi^2}\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)^{3/2}, \qquad (7.4)$$

тогда плотность частиц (число частиц, имеющих энергию от E до $E + dE$)

$$\rho(E) = dn = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{1/2} dE.$$

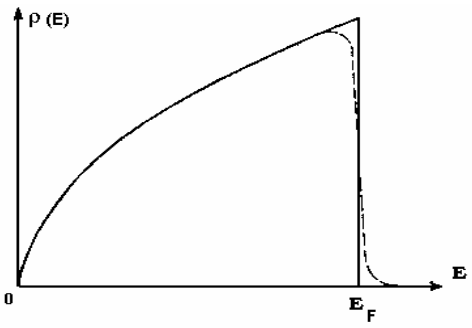


Рис. 7.1. Распределение электронов в металле по энергиям

С учетом распределения Ферми-Дирака:

$$\rho(E) = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{E^{1/2}dE}{1+\exp\left(\frac{E-E_F}{k_BT}\right)}. \qquad (7.5)$$

При абсолютном нуле температуры энергия электронов металла не может быть больше энергии Ферми, поэтому ни один электрон не может выйти из металла, а функция распределения обрывается при E_F (рис. 7.1). При T > 0 обрыв сглаживается, появляется «хвост» функции распределения электронов с энергиями больше E_F, именно у этих электронов, количество которых экспоненциально растет с ростом температуры поверхности, появляется ненулевая вероятность преодоления потенциального барьера на границе металла. Поэтому термоэмиссионный ток заметен только для нагретых тел. Его величина рассчитывается интегрированием функции распределения по нормальной составляющей к поверхности энергии W_x в пределах интегрирования от W_a до ∞ , где W_a - высота потенциального барьера. С учетом вероятности преодоления потенциального барьера, а также с учетом того, что для термоэлектронов $W_x - E_F >> k_BT$, плотность термоэмиссионного тока может быть представлена формулой Ричардсона-Дэшмана:

$$j_t = AT^2 \exp\left(-\frac{e\varphi_a}{kT}\right), \qquad (7.6)$$

где $\varphi_a = W_a - E_F$ – работа выхода электрона из материала катода, равная наименьшей энергии, которую нужно сообщить электронам для их эмиссии, k_B – постоянная Больцмана. Величину $A = A_0D$, учитывающую прозрачность барьера между металлом и вакуумом $D = (1 - \bar{r})$, $\bar{r}$ – коэффициент отражения электронов от барьера, усредненный по энергиям электронов, иногда называют «постоянной Ричардсона», где

$$A_0\left[\frac{A}{см^2K^2}\right] = \frac{4\pi mek_B^2}{h^3} = 120.4 \qquad (7.7)$$

- универсальная постоянная. Следует учесть, что работа выхода зависит от температуры (вследствие теплового расширения), обычно эта зависимость линейная:

$$\varphi_a = \varphi_0 + \alpha(T-T_0), \qquad (7.8)$$

$\alpha = d\varphi/dT|_{T=T_0} = 10^{-5} \div 10^{-4}$ эВ/град – температурный коэффициент, который может быть как положительным, так и отрицательным. Значение постоянной Ричардсона A для разных металлов изменяются от 15 до 350 А/(см^2·К^2). Экспериментальное определение работы выхода φ_a и «постоянной» Ричардсона A можно провести по методу «прямой Ричардсона», строя по экспериментальным данным зависимость $\ln(j_T/T^2)$ от $1/T$. По тангенсу угла наклона полученной прямой определяют работу выхода φ_a, а точка пересечения прямой с осью ординат дает значение $\ln(A)$.

Зависимость плотности термоэмиссионного тока (7.6) можно получить из условия термодинамического равновесия, если рассчитать поток электронов в вакуум:

$$j_T = en_e v_{cp}/4, \tag{7.9}$$

где $$n_e = 2\left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{e\varphi_a}{k_B T}\right) \tag{7.10}$$

- плотность электронов, $v_{cp} = \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}}$ - средняя термодинамическая скорость.

При отсутствии (или пренебрежимо малой напряженности) ускоряющего электроны внешнего электрического поля эмитированные электроны создают около поверхности отрицательный пространственный заряд, ограничивающий ток термоэмиссии. Поэтому, в случае малых напряжений между катодом и анодом термоэмиссионный ток можно приравнять плотности тока $j_{3/2}$, зависимость плотности тока j_T от напряжения $j_T \sim U_a^{3/2}$. При дальнейшем увеличении U_a объемный заряд у катода исчезает и, казалось бы, ток должен выйти на насыщение, когда все эмитированные электроны уходят на анод, и не зависеть от U_a. Однако, как показали эксперименты, при дальнейшем увеличении U_a ток эмиссии продолжает медленно расти. Рост электронного тока эмиссии под действием внешнего электрического поля вследствие снижения работы выхода электрона из твердого тела (понижения потенциального барьера)

$$\varphi_E = \varphi_a - \Delta\varphi_ш \tag{7.11}$$

называется *эффектом Шоттки* (рис. 7.2). Потенциал поля на расстоянии x от поверхности металла с учетом сил зеркального отображения заряда и внешнего электрического поля E можно описать в виде:

$$U(x) = E_F + \varphi_a - e^2/4x - eEx. \tag{7.12}$$

Снижение работы выхода можно оценить из соотношения, приравнивая на вершине потенциального холма силы торможения внутрь металла и силы ускорения во вне: $eE = e^2/4x^2_m$, тогда положение максимума

$$x_m = \sqrt{e/4E}, \tag{7.13}$$

а потенциал в максимуме

$$U_m = E_F + \varphi_a - e^{3/2}E^{1/2}. \tag{7.14}$$

Снижение работы выхода:

$$e\Delta\varphi_ш[\text{эВ}] = e^{3/2}E^{1/2} = 3.79\cdot E^{1/2}\,[\text{В/см}]. \tag{7.15}$$

Плотность термоэмиссионного тока с учетом эффекта Шоттки:

$$j_{\text{ТШ}} = j_{\text{Т}}\exp(e^{3/2}E^{1/2}/k_BT) = j_{\text{Т}}\exp(4.39E^{1/2}[\text{В/см}]/T[\text{К}]). \qquad (7.16)$$

§45. Автоэлектронная эмиссия

В присутствии внешнего электрического поля высокой напряженности E ($10^6 \div 10^7$ В/см), помимо увеличения тока эмиссии за счет снижения работы выхода (эффекта Шоттки), из-за ограниченности толщины барьера появляется вероятность подбарьерного перехода – «тунельного» эффекта. Испускание электронов под действием внешнего электрического поля, обусловленое вероятностью подбарьерного перехода потенциального барьера, имеющего во внешнем электрическом поле ограниченную ширину, называется *автоэлектронной эмиссией*. Коэффициент прохождения (прозрачности) барьера зависит от энергии электрона W_x, высоты потенциального барьера W_a, и для прямоугольного барьера ширины h выражается соотношением:

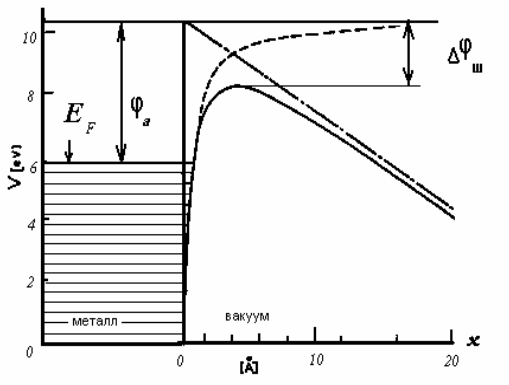


Рис. 7.2 Потенциальный барьер на границе металл – вакуум

$$D(W_x) = \exp(-4\pi\sqrt{2m_e(W_a - W_x)}/h). \qquad (7.17)$$

Для вычисления прозрачности потенциального барьера непрямоугольной формы можно его разделить на ряд прямоугольных барьеров ширины dx, и проинтегрировать по ширине барьера. В итоге зависимость от энергии электрона выражается формулой:

$$D(W_x) = \exp[-\frac{8\pi\sqrt{2m_e}}{3he}\cdot(\frac{W_a - W_x}{E})^{3/2}\cdot\theta(\zeta)], \qquad (7.18)$$

где $\theta(\zeta)$ – функция Нордгейма, выражающаяся через эллиптические интегралы, где $\zeta = \dfrac{\Delta\varphi_ш}{\varphi_a(W_x)} = \dfrac{\Delta\varphi_ш}{W_a - W_x} = \dfrac{e^{3/2}E^{1/2}}{W_a - W_x}$. Некоторые значения функции Нордгейма представлены в таблице 7.1.

Таблица 7.1.

$\Delta\varphi_ш/\varphi_a$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
θ	1	0.98	0.94	0.87	0.79	0.69	0.58	0.45	0.31	0.16	0

Для $0 < \zeta < 1$ $\theta(\zeta) \approx 0.955 - 1.03\zeta^2$. Плотность тока автоэлектронной эмиссии можно описать формулой Фаулера-Нордгейма:

$$j_{АЭ}[\frac{A}{см^2}] = B_0 \cdot \frac{E^2}{e\varphi_a} \cdot \exp(-\frac{(e\varphi_a)^{3/2}\theta(\Delta\varphi_ш / \varphi_a)}{E / E_0}) =$$
$$= 6.2 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{\sqrt{E_F / e\varphi_a}\, E^2[В/см]}{E_F + e\varphi_a} \cdot \exp(-\frac{6.85 \cdot 10^7 \cdot (e\varphi_a)^{3/2}\theta(\Delta\varphi_ш / \varphi_a)}{E[В/см]}), \quad (7.19)$$

где E_F – энергия Ферми, $B_0 = e^2/(8\pi h)$, $E_0 = 8\pi\sqrt{2m_e}/(3he)$. Влияние множителя E^2, подобно влиянию множителя T^2 в формуле Ричардсона-Дэшмана, незначительно. Более существенно влияние экспоненциальной зависимости от работы выхода электрона $e\varphi_a$. Автоэлектронная эмиссия с микроскопических острий чаще всего является причиной пробоя вакуумных промежутков. Автоэлектронные катоды изготовляются в виде игл (острий) с большой кривизной поверхности, около которых электростатическое поле достигает более 10^6 В/см.

§46. Изменение температуры эмиттера при термо- и автоэлектронной эмиссии

Средняя энергия, уносимая электроном с поверхности при термоэлектронной эмиссии, может быть вычислена в предположении максвелловского распределения электронов по энергиям, с учетом того, что энергия вышедших из металла электронов определяется из соотношений между компонентами скорости электрона в металле v и в вакууме u :

$$\begin{cases} mu_x^2/2 = mv_x^2 - W_a \\ u_y = v_y \\ u_z = v_z \end{cases}, \quad (7.20)$$

где ось x направлена по нормали к поверхности. Число электронов в направлении по нормали к поверхности металла со скоростями в пределах от u_x до $u_x + du_x$ задается *модифицированным распределением Максвелла* :

$$dN = \frac{4\pi m^2}{h^3} k_B T \exp(E_F / k_B T) \exp(-\frac{2mW_a + m^2 u_x^2}{2mk_B T}) u_x du_x =$$
$$= \frac{4\pi m^2}{h^3} k_B T \exp(-e\varphi_a / k_B T) \exp(-\frac{mu_x^2}{2k_B T}) u_x du_x = \frac{mN}{k_B T} \exp(-\frac{mu_x^2}{2k_B T}) u_x du_x =$$
$$= \frac{N}{k_B T} \exp(-\frac{W_x}{k_B T}) dW_x, \quad (7.21)$$

где $N = j_T/e$ – число термоэлектронов с единицы площади в секунду. Средняя энергия по нормали к поверхности:

$$\overline{W_x} = \int_{u_x=0}^{u_x=\infty} W_x \frac{dN}{N} = k_B T \int_0^\infty \varepsilon \exp(-\varepsilon) d\varepsilon = k_B T, \quad (7.22)$$

где $\varepsilon = W_x/k_BT$. Для двух других направлений средняя энергия как для обычного распределения Максвелла: $\overline{W_y} = \frac{1}{2}k_BT$ и $\overline{W_z} = \frac{1}{2}k_BT$. В итоге среднее значение полной энергии вылетающего с поверхности эмиттера температуры T_s:

$$\overline{W} = \overline{W_x} + \overline{W_y} + \overline{W_z} = 2k_BT_S . \qquad (7.23)$$

Если между катодом и анодом подать тормозящую разность потенциалов, то условие попадания электрона на катод: $m_ev^2/2 \geq -eU_a$, где напряжение на аноде $U_a < 0$. Ток на анод:

$$I_a = S_a \int_{\sqrt{-\frac{2eU_a}{m_e}}}^{\infty} u_x N_e \frac{m_e}{k_BT} \exp(-\frac{mu_x^2}{2k_BT}) du_x = I_э \exp(\frac{eU_a}{k_BT}) , \qquad (7.24)$$

где $I_э$ – ток с эмиттера. Меняя U_a, можно экспериментально определять распределение электронов по энергиям. Эксперименты подтверждают то, что эмитированные электроны имеют распределение Максвелла, причем температура электронов по максвелловскому распределению равна температуре эмиттера. Поэтому начальные энергии эмиттированных электронов (с учетом того, что 1 эВ ≈ 11600 К) можно считать нулевыми по сравнению с энергиями, приобретаемыми в ускоряющей разности потенциалов уже в несколько вольт. Однако для охлаждения поверхности эмиттера эта энергия существенна, к тому же каждый электрон помимо тепловой энергии уносит из металла энергию, равную работе выхода. Мощность поверхностного охлаждения $w = (j_T/e)(2k_BT_S+e\varphi_a)$.

При автоэлектронной эмиссии за счет «туннельного» эффекта эмитируются электроны, обладающие энергией, меньшей энергии Ферми: $E < E_F$. Средняя энергия эмитированных электронов в этом случае $\overline{W} = -\varphi_a - (E_F-E)$, мощность поверхностного нагрева поверхности за счет прихода более высокоэнергетичных электронов из объема металла: $w = (j_T/e)(E_F-E)$. Таким образом, термоэлектронная эмиссия сопровождается охлаждением поверхности, а автоэлектронная – нагревом (эффект Ноттингема).

§47. Фотоэлектронная эмиссия

Испускание электронов под действием падающего на поверхность электромагнитного излучения называется *фотоэлектронной эмиссией (ФЭЭ)*. Поток электромагнитного излучения частью отражается, а частью проникает внутрь тела и там поглощается, отдавая энергию электронам проводимости, которые могут преодолеть потенциальный барьер и выйти из тела. ФЭЭ была обнаружена Герцем 1887 г. Основные законы ФЭЭ, установленные экспериментально задолго до теоретического обоснования, сводятся к следующему:

1. Фотоэлектронный ток в режиме насыщения пропорционален падающему на эмиттер плотности потока мощности (или интенсивности облучения I [Вт/см^2])

$j_{ФЭ} \sim I$ (закон Столетова – 1889 г.). (7.25)

2. Теоретическое обоснование экспериментально открытой Ленардом (1899 г.) закономерности – максимальная энергия фотоэлектронов прямо пропорциональна частоте падающего излучения и не зависит от его интенсивности – впервые дал Эйнштейн, введя в физику понятие о квантах света (фотонах):

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = h\nu - e\varphi_a \qquad \text{(закон Эйнштейна).} \tag{7.26}$$

Отклонение от закона Эйнштейна возникает при больших интенсивностях излучения, когда электрон может поглощать несколько n фотонов:

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = nh\nu - e\varphi_a \tag{7.27}$$

3. Следствием закона Эйнштейна является существование длиноволновой (красной) границы λ области спектра падающего излучения, которое может вызывать фотоэмиссию электронов:

$$\lambda < \lambda_{гр}, \text{ или } \nu > \nu_{гр} = c/\lambda_{гр} = e\varphi_a/h, \tag{7.28}$$

таким образом, граничная длина волны выражается через работу выхода: $\lambda_{гр}$=12300/($e\varphi_a$[эВ]) при $T = 0$ К. При $T \neq 0$ К в металле имеются электроны с энергиями, большими E_F, для них граничная частота снижается. Но в холодном металле доля таких электронов крайне мала. Кроме того, работа выхода, а значит, и граничная частота зависит от напряженности электрического поля на поверхности (эффект Шоттки).

4. Фотоэффект обладает свойством безынерциальности - фототок появляется и исчезает вместе с освещением, запаздывая не более чем на 10^{-9} с.

Фотоэффект можно характеризовать либо *квантовым выходом* Y – числом электронов на один фотон ($Y = 10^{-3} \div 10^{-1}$), либо плотностью фототока $j_ф$. Отношение фототока к интенсивности потока монохроматического излучения выражает *спектральную чувствительность* фотокатодов, а к интенсивности потока излучения стандартного источника света – *интегральную чувствительность*. Глубина выхода электронов из металлов составляет насколько атомных слоев, поэтому, теряя на своем пути часть энергии, фотоэлектроны на выходе из металлов имеют некоторое распределение по энергиям от нуля до максимального значения, определяемого по закону Эйнштейна. Распределение фотоэлектронов по энергиям можно определить экспериментально методом задерживающего потенциала. Для сбора на анод всех фотоэлектронов в опытах Лукирского и Прелижаева использовались катод в виде шара и анод в виде концентрической катоду сферы, через узкое отверстие которой на катод подавался луч света. Разность значений тока при двух задерживающих потенциалах $-U$ и $-(U + \Delta U)$ дает число фотоэлектронов, энергия которых при вылете с катода лежит в пределах от eU до $e(U + \Delta U)$. Этот же метод можно использовать для определения красной границы

фотоэффекта. Задерживающий потенциал, при котором фототок становится равным нулю, определяет разность между частотой гамма-кванта ν и граничной частотой фотоэффекта $\nu_{гр}$ для данного материала: $U_0 = h(\nu - \nu_{гр})/e$. Значения U_0, определяемые для разных частот облучения ν, лежат на прямой, точка пересечения которой с осью абсцисс дает граничную частоту $\nu_{гр}$.

Основные закономерности ФЭЭ металлов хорошо описываются теорией Фаулера, согласно которой после поглощения в металле фотона его энергия переходит электронам проводимости, в результате чего электронный газ в металле около его поверхности состоит из смеси газов с нормальным (распределением Ферми) и возбужденным (сдвинутым на $h\nu$) распределением по энергиям (рис. 7.3). Для подсчета числа фотоэлектронов можно провести такое же интегрирование функции распределения, что и при подсчете плотности тока термоэмиссии, изменив нижний предел интегрирования с W_a на $W_a - h\nu$, тем самым включив в интегрирование электроны, которые приобретают недостающую для преодоления потенциального барьера энергию за счет поглощенных квантов. Так же, как и для термоэлектронов, необходимо учитывать вероятность прохождения барьера, так как часть электронов при движении из металла может быть отражена от поверхности раздела металл - вакуум. Кроме этого, необходимо учесть вероятность поглощения фотона. Эта вероятность в общем случае зависит от энергии поглощающего электрона и энергии гамма-кванта. В теории Фаулера эта вероятность считается постоянной величиной, что, как оказалось, в интервале частот от $\nu_{гр}$ до $1.5\nu_{гр}$ выполняется. В результате интегрирования плотность фототока определяется по формуле Фаулера:

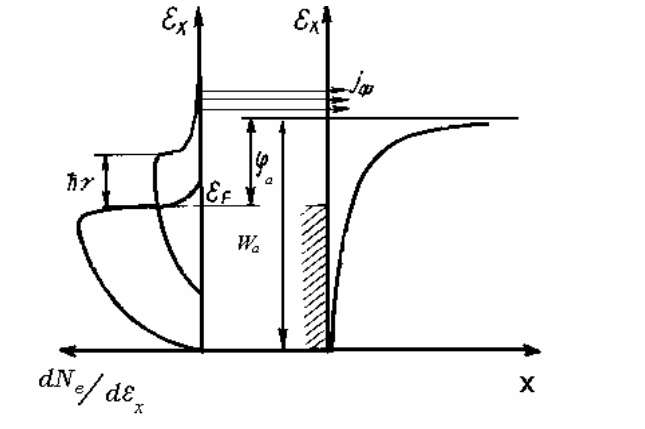


Рис. 7.3. Фотоэмиссионный ток электронов из «хвоста» возмущенной функции распределения, преодолевающих потенциальный барьер

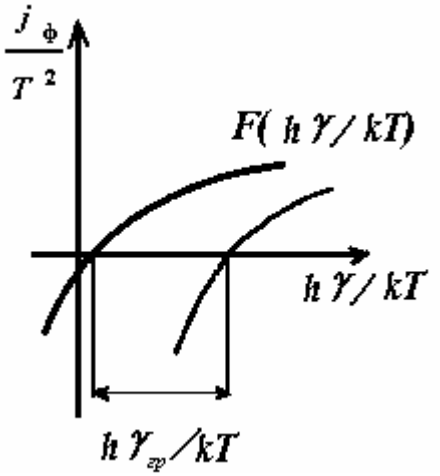


Рис. 7.4. Определение красной границы с помощью функции Фаулера.

$$j_\Phi = \begin{cases} B_1 T^2 \exp\left(\dfrac{h\nu - h\nu_{гр}}{kT}\right), \nu \le \nu_{гр} = e\varphi_a / h \\ B_2 T^2 \left(\dfrac{(h\nu - h\nu_{гр})^2}{k^2 T^2} + B_3\right), \nu > \nu_{гр} \end{cases}, \qquad (7.29)$$

где B_1, B_2, B_3 – постоянные коэффициенты, пропорциональные A_0. Зависимость $j_\phi(\frac{h\gamma}{kT})$ можно также представить в виде рядов [32]. Из формулы Фаулера видно, что при Т ≈0 $j_\phi \to 0$ и $\nu_{гр}$ действительно является красной границей. При $T \neq 0$ не существует резкой границы фотоэффекта, фототок падает экспоненциально при $\nu < \nu_{гр}$, при $\nu > \nu_{гр}$ плотность фототока пропорциональна квадрату частоты падающего излучения $j_Ф \sim \nu^2$. Экспериментально положение $\nu_{гр}$ определяют по измеренной спектральной зависимости фототока при заданной температуре $T > 0$. Эта зависимость откладывается на графике в координатах $x = h\nu/kT$ и $y = \ln(j_Ф/T^2)$. Полученная экспериментальная кривая соответствует зависимости:

$$\ln(j_Ф/T^2) = B + F((h\nu - h\nu_{гр})/kT) = B + F(x - h\nu_{гр}/kT). \qquad (7.30)$$

Данная кривая отличается от теоретической кривой *функции Фаулера* $F = F(h\nu/kT)$ сдвигом по оси y на константу B и по оси x на $h\nu_{гр}/kT$ (рис. 7.4). Именно определение сдвига по оси x экспериментальной кривой для ее совмещения с теоретической кривой Фаулера позволяет найти граничную частоту $\nu_{гр}$.

§48. Вторичная электронная эмиссия

Вторичная электрон-электронная эмиссия

Эмиссия электронов с поверхности твердого тела, бомбардируемой потоком электронов, называется вторичной электрон-электронной эмиссией. Наиболее распространенная схема экспериментального исследования энергетического распределения вторичных электронов методом задерживающего поля с использованием сферического коллектора Лукирского и Прелижаева показана на рис. 7.5. Задерживающее поле прикладывается между мишенью и коллектором. Если потенциал коллектора будет больше, чем на мишени, то на коллектор придет полный ток вторичной электронной эмиссии I_s. Вторичная электронная эмиссия характеризуется количеством вторичных электронов на одну первичную частицу: $\gamma_e = N_s/N_p$. Интегрально это количество равно отношению токов

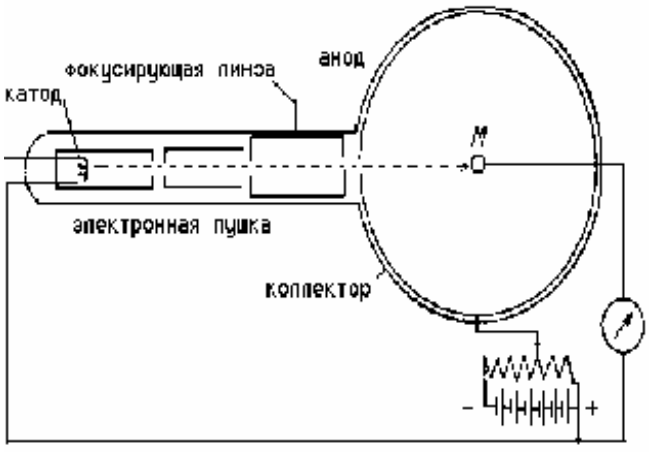


Рис. 7.5. Схема опыта по исследованию вторичной электронной эмиссии

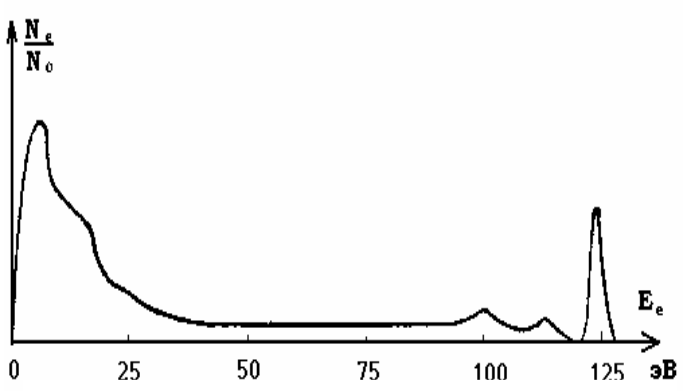


Рис. 7.6. Распределение вторичных электронов по энергиям

вторичных и первичных электронов I_s/I_p. Более точным методом определения скоростей вторичных электронов является использование дисперсионных электростатического или магнитного энергоанализатора с полукруговой траекторией, описанного в главе 5. Полученное экспериментальное энергетическое распределение (рис. 7.6) независимо от материала и энергии первичных электронов содержит два высоких максимума. Первый в области малых энергий (< 50 эВ) соответствует *истинным* вторичным электронам, которые выходят из твердого тела за счет поглощения энергии первичных электронов. Далеко не все электроны, получившие дополнительную энергию, добираются до поверхности, растрачивая энергию по пути на взаимодействие с ионами решетки и другими электронами. Преодолевшие потенциальный барьер истинные вторичные электроны на выходе имеют энергии, не зависящие от энергии первичных электронов. Работа выхода материала также не оказывает существенного влияния на эмиссию вторичных электронов, так как, во-первых, энергия первичных электронов, как правило, гораздо больше работы выхода, во-вторых, эмиссия происходит не из поверхностных слоев, а из глубины металла, поэтому более важным является потеря энергии при движении электрона к поверхности. Второй, гораздо более узкий максимум находится в области высоких энергий и соответствует упруго отраженным первичным электронам, практически полностью сохранившим свою скорость после отражения. Положение этого максимума соответствует энергии первичных электронов. Область энергий между этими двумя максимумами соответствует не упруго отраженным вторичным электронам. Таким образом, энергетический спектр вторичных электронов состоит из широкого пика в области низких энергий с максимумом при W_{max}, который принадлежит истинно-вторичным электронам, выходящим с глубины 5 - 100 А от поверхности, и очень узкого пика отраженных от поверхности электронов в области высоких энергий с максимумом при энергии, равной энергии первичных электронов. Для характеристики истинной электрон-электронной эмиссии вводят коэффициент вторичной электронной эмиссии $\delta_e = N_s/N_p$, где N_s – число истинно вторичных электронов, N_s - число первичных электронов, падающих на поверхность в единицу времени. Для характеристики эмиссии отраженных от

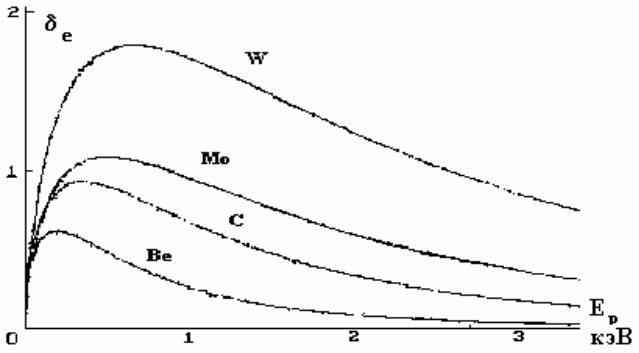


Рис. 7.7. Зависимость коэффициента истинной вторичной электронной эмиссии от энергии первичных электронов для W, Mo, C, Be

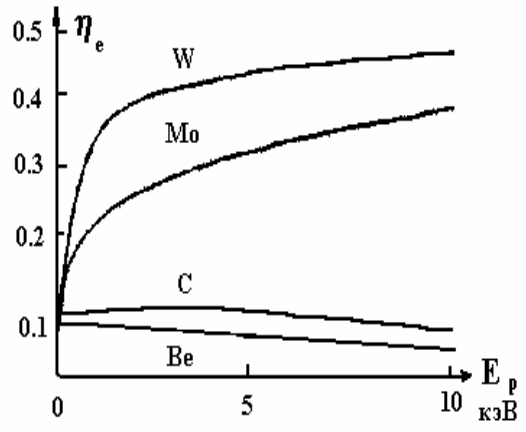


Рис. 7.8. Зависимость коэффициента отражения от энергии первичных электронов

поверхности первичных электронов используется коэффициент отражения $\eta_e = (N_e+N_u)/N_p$, где N_e и N_u - упруго и неупруго отраженные электроны. Суммарный коэффициент вторичной электронной эмиссии $\gamma_e = \delta_e + \eta_e$. Зависимость δ_e от энергии первичных электронов W_p задается эмпирической формулой (Kollath):

$$\frac{\delta_e(W_p)}{\delta_{e\max}} = (2.72)^2 \frac{W_p}{W_{\max}} \exp(-2\sqrt{\frac{W_p}{W_{\max}}}), \qquad (7.31)$$

где $\delta_{emax}=\sqrt{0.35e\varphi_a}$, W_{max} – значение и положение максимума. Положение максимума зависимости коэффициента вторичной электронной эмиссии для разных материалов представлено в таблице 7.2. Рост δ_e с энергией первичных электронов сменяется спадом (рис. 7.7), так как при дальнейшем росте энергии первичных электронов образование вторичных происходит все глубже и глубже, растут потери энергии вторичных электронов в металле и их выход становится все более затрудненным. Этим же объясняется существование сдвига максимума $W_{\max}$ в энергетическом распределение вторичных электронов для материалов с высоким атомным числом (например, для вольфрама) в сторону низких энергий из-за снижения длины пробега первичных электронов в твердом теле (электронам, получившим энергию от первичных вблизи поверхности, легче выйти из твердого тела). Зависимость δ_e от угла падения первичных электронов α (угол с нормалью к поверхности) для $\alpha < 60^o$ можно представить в виде:

$$\delta_e(\alpha) = \delta_e(0)/\cos^{\beta}\alpha, \qquad (7.32)$$

где $\beta = 1.3 \div 1.5$. Чем больше α, тем меньше глубина, которую нужно преодолеть вторичному электрону для выхода. Эмпирическая зависимость коэффициента отражения η_e для нормального падения электронов от энергии первичных электронов W_p (рис.7.8) и атомного номера z:

$$\eta_e(W_p, z) = W_p^{m(z)} \exp(C(z)), \qquad (7.33)$$

где $m(z)=0.1382–0.9211z^{-0.5}$, $C(z)=0.1904–0.2236\ln z+0.1292\ln^2 z–0.01491\ln^3 z$ (Hunger). Зависимость η_e от угла падения α:

$$\eta_e(\alpha) = 0.891(\frac{\eta_e(0)}{0.891})^{\cos\alpha} \quad \text{(Darlington)}. \qquad (7.34)$$

Таблица 7.2.

	Al	Be	C (алмаз)	C (графит)	Cu	Fe	Mo	Ni	Ta	Ti	W
δ_{emax}	1.0	0.5	2.8	1.0	1.3	1.3	1.25	1.3	1.3	0.9	1.4
W_{max}[эВ]	300	200	750	300	600	400	375	550	600	280	650

Наиболее распространенным применением вторичной электронной эмиссии являются электронные умножители, принцип действия которых представлен

схемой на рис. 7.9. Максимально полное попадания вторичных электронов на следующий эмиттер может обеспечиваться магнитной или электрической фокусировкой.

Вторичная ионно-электронная эмиссия

При взаимодействии ионов с поверхностью твердого тела наблюдается эмиссия электронов, характеризуемая коэффициентом ионно-электронной эмиссии: $\gamma_i = n_e/n_i$, где n_e - число эмитированных электронов, n_i - число ионов, упавших на ту же поверхность за то же время. Для однозарядных ионов $\gamma_i = n_e/n_i = j_e/j_i$, при эмиссии под действием ионов зарядом Z $\gamma_i = Zj_e/j_i$. Эмиссия электронов может происходить в результате двух процессов: первый процесс, связан с возбуждением электронов тела за счет потенциальной энергии электронов эмиттера в поле приходящего на поверхность тела иона – такую эмиссию называют *потенциальной* с коэффициентом эмиссии γ_n; второй процесс связан с возбуждением электронной системы тела кинетической энергией иона – в этом случае эмиссию называют *кинетической* с коэффициентом эмиссии $\gamma_к$. Если присутствуют оба процесса, то $\gamma_i = \gamma_n + \gamma_к$. Потенциальная ионно-электронная эмиссия была открыта Пеннингом в 1928 г. При исследовании зависимости электронной эмиссии от энергии падающих ионов он обнаружил, что эмиссия остается и при очень малых, практически нулевых, энергиях ионов. Из этого можно было сделать вывод, что испускание электронов не связано с кинетической энергией ионов. В экспериментах было выявлено, что такая потенциальная ионно-электронная эмиссия происходит только для ионов, потенциал ионизации которых V_i в два раза больше работы выхода материала эмиттера φ_a:

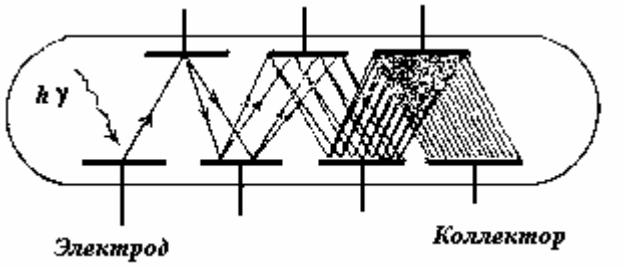


Рис. 7.9. Схема электронного умножителя

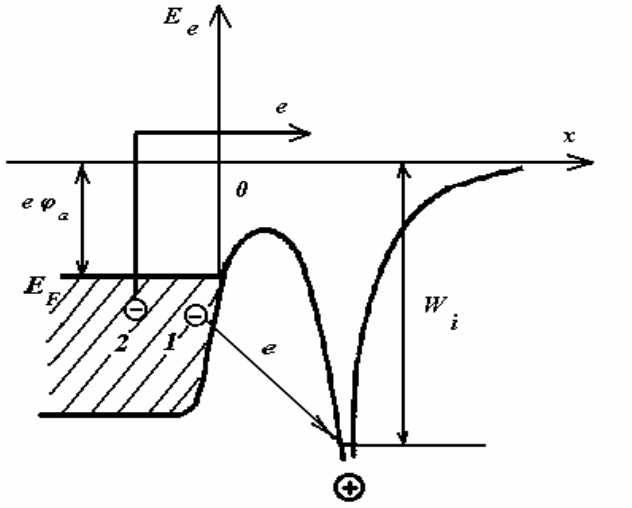


Рис. 7.10. Схема потенциальной ионно-электронной эмиссии

$$V_i > 2\varphi_a. \qquad (7.35)$$

Это находит объяснение в модели оже-нейтрализации иона. Приближаясь к поверхности металла, ион изменяет своим полем поверхностный потенциальный барьер, понижая его. Один электрон, имея в металле энергию E_1, совершает туннельный переход и нейтрализует ион (рис. 7.10). При этом

выделяемая энергия $V_i - E_1$ может быть передана второму электрону, имеющему в металле энергию E_2. Для того чтобы второй электрон вышел из металла, его кинетическая энергия должна быть больше нуля: $mv^2/2 = V_i - E_1 - E_2 > 0$. С учетом того, что при низких температурах E_1 и E_2 меньше φ_a, $V_i > 2\varphi_a$. Опыт показывает, что коэффициент γ_n линейно растет с увеличением разности $V_i - 2\varphi_a$ для различных пар мишень – ион. Для чистых поверхностей эту зависимость можно описать эмпирической формулой:

$$\gamma_n \approx 0.016(V_i - 2\varphi_a)[\text{эВ}]. \qquad (7.36)$$

Коэффициент γ_n тем больше, чем больше заряд иона (кратность ионизации): $\gamma_n(A^+) < \gamma_n(A^{++}) < \gamma_n(A^{+++})$. Для мишеней, поверхность которых достаточно чистая, γ_n практически не зависит от энергии падающих ионов E_p: $d\gamma_n/dE_p \approx 0$. При большой величине разности $V_i - 2\varphi_a >> k_BT$ коэффициент потенциальной ионно-электронной эмиссии не зависит от температуры поверхности мишени. При малой величине этой разности: $V_i - 2\varphi_a \approx k_BT$ термическое увеличение энергии электронов повышает вероятность эмиссии и γ_n растет с увеличением температуры, при этом потенциальная эмиссия возможна и при $V_i < 2\varphi_a$.

При высоких энергиях падающих ионов кинетическая ионно-электронная эмиссия преобладает над потенциальной. Экспериментально было обнаружено, что существует пороговое значение энергии первичных ионов $(E_p)_{гр} \sim 1.5$ кэВ, меньше которого коэффициент эмиссии $\gamma_к \approx 0$. В припороговой области энергий ионов ($E_p < 10$ кэВ) коэффициент эмиссии пропорционален энергии: $\gamma_к = C(E_p - (E_p)_{гр})$, где C = const. Для чистых металлов $C \le 0.2 \cdot 10^{-2}$ эВ$^{-1}$. При более высоких энергиях $\gamma_к \sim E_p^{1/2}$. При облучении монокристаллов коэффициент $\gamma_к$ зависит от угла падения ионов на поверхность, причем эта зависимость носит периодический характер: положения максимумов совпадают с направлениями падающих ионов вдоль кристаллографических направлений в монокристалле. Современные представления о кинетической ионно-электронной эмиссии (модель Парилиса, Петрова, Кишиневского) основываются на двухэтапности процесса. На первом этапе кинетическая энергия иона передается электронной системе металла с образованием «дырок» (получая энергию, электроны атомов совершают межзонный переход в зону проводимости, образуя дырки). На втором этапе происходит рекомбинация дырки и электрона проводимости металла с передачей выделяющейся энергии за счет оже-процесса другому электрону проводимости, который эмитируется из мишени. Таким образом, второй этап кинетической ионно-электронной эмиссии близок по природе потенциальной эмиссии.

Поверхностная ионизация

Ионная эмиссия в результате термической десорбции частиц с поверхности твердого тела называется поверхностной ионизацией. В виде ионов могут испаряться как атомы самого нагретого тела (например, металла), так и атомы и молекулы, которые попали на поверхность из окружающей среды. Часть из них после адсорбирования испаряются обратно в газ, но уже в виде положительных или отрицательных ионов. Поверхностная ионизация была открыта Ленгмюром и Кингдоном (1923 г.), которые обнаружили в цилиндрическом диоде, заполненном парами цезия, ток положительных ионов. Степень поверхностной

ионизации $\alpha = n_i/n_a$, где n_i - плотность ионов, отлетающих от поверхности, n_a - плотность испаряющихся атомов, характеризует зарядовое равновесие в испаряющемся потоке частиц и не зависит от способа поступления частиц на поверхность. Другой характеристикой поверхностной ионизации является коэффициент поверхностной ионизации $\beta = n_i/n = n_i/(n_i+n_a)$ ($\beta=\alpha/(1+\alpha)$). К описанию процесса ионизации испаряющихся атомов Ленгмюр применил формулу Саха для термической ионизации газа. В результате при образовании положительных ионов термодинамически равновесный ионизационный состав у поверхности тела можно характеризовать степенью ионизации α, которая вычисляется из уравнения Саха-Ленгмюра:

$$\alpha = \frac{g_i}{g_a}\exp(\frac{e(\varphi_a - U_i)}{kT}), \qquad (7.37)$$

где U_i – потенциал ионизации атомов, $e\varphi_a$ – работа выхода электронов из металла, g_i/g_a – отношение статистических весов ионного и атомного состояний ионизирующихся частиц равно ½ для одновалентного адсорбирующего металла и 2 - для двухвалентного. Если энергия ионизации атомов покрытия (например, Cs, K, Na на W) меньше работы выхода электронов из металлической подложки, то практически все испаряющиеся с покрытия атомы покидают поверхность в виде положительных ионов.

Атомы некоторых элементов могут покидать поверхность, присоединяя к себе электрон и превращаясь в отрицательный ион. Для разрушения отрицательного иона требуется совершить некоторую работу, которую называют работой сродства eS. Часть таких адсорбированных атомов испаряются в виде отрицательных ионов. Для определения степени ионизации отрицательных ионов можно использовать уравнение, аналогичное уравнению Саха-Ленгмюра:

$$\alpha_- = \frac{g_-}{g_a}\exp(\frac{e(S - \varphi_a)}{kT}). \qquad (7.38)$$

ГЛАВА 8

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ГАЗАХ И ГАЗОВЫЙ РАЗРЯД

Газовый разряд – это процесс протекания электрического тока через газ. Различают несамостоятельные и самостоятельные разряды. Несамостоятельный разряд возможен при инжекции электронов в разрядный промежуток (например, термоэмиссия с катода) или при ионизации газа каким-либо внешним источником. Несамостоятельные разряды используют довольно широко: это и ионизационные камеры технологического и дозиметрического назначения на атомных реакторах, газотроны в выпрямительных установках сетей питания постоянным током, плазмотроны с накаливаемым катодом и т.д. Физические процессы, протекающие в разных несамостоятельных разрядах, естественно, различаются, но не все они характерны для собственно газовых разрядов, как обычно понимают этот термин. В них с помощью электрического поля просто собирают образующиеся в объеме заряды (что вообще-то не совсем "просто"!), в пропорциональных счетчиках используют ограниченное образование электронных лавин, в гейгеровских счетчиках происходит коронный разряд, в газотронах и тиратронах «обходят» закон «3/2», как бы приближая анод к катоду, в дуговых лампах дневного света термоэмиссия с подогревных катодов только обеспечивает зажигание самостоятельной дуги. Однако наиболее широко применяются самостоятельные разряды, о них и будет речь. Самостоятельный тлеющий разряд зажигается тогда, когда напряжение на его активных участках достигает "*напряжения пробоя*", для дугового разряда необходимо создать условия возникновения термоэмиссии с катода. Коронные разряды возникают только при наличии участков с очень большой неоднородностью напряженности электрического поля, а искровые разряды принципиально импульсные. Все это справедливо для постоянных электрических полей, у полей ВЧ и СВЧ, которые широко используются в технологиях, есть своя специфика, особенно у полей лазерной искры.

§49. Электрический ток в газах

Столкновения частиц могут иметь *упругий* и *неупругий* характер. При упругом столкновении меняется направление движения частиц, происходит обмен импульсами и кинетической энергией. При неупругом столкновении внутренняя энергия и состояние одной из частиц (редко когда обоих) изменяется. Ионизация атома при ударе электроном происходит за счет передачи кинетической энергии электрона атому. Значение энергии электрона, достаточное для ионизации атома называется потенциалом ионизации U_i. При многократной ионизации энергия, необходимая для отрыва каждого следующего электрона возрастает. Пионерами экспериментального определения потенциала ионизации атомов были Франк и Герц. Метод определения основывался на том, что зависимость тока, протекающего через диод в парах ртути, от ускоряющего электроны напряжения носит не монотонный возрастающий характер, а имеет провалы из-за потерь энергии электронов на возбуждение и ионизацию атомов ртути. Зависимость вероятности ионизации атомов любого газа от энергии частиц U задается функцией ионизации:

$$f_i = a(U-U_i)\exp(-(U-U_i)/b), \qquad (8.1)$$

где a и b – эмпирические константы для конкретного газа. Время между столкновениями, приводящими к ионизации, обратно пропорционально частоте ионизации $\tau_i = 1/\nu_i$. Число ионизаций в единицу времени пропорционально плотности частиц газа n, скорости налетающей частицы v и сечению ионизации σ_i:

$$\nu_i = nv\sigma_i. \qquad (8.2)$$

Ионизационный пробег λ_i (длина, на которой частица может ионизовать) равен

$$\lambda_i = v\tau_i = v/\nu_i = 1/(n\sigma_i) = 1/S_i, \qquad (8.3)$$

где $S_i = n\sigma_i$ называется *суммарным сечением ионизации*. Суммарное сечение ионизации так же хорошо аппроксимируется подобной (8.1) зависимостью от энергии частицы U:

$$S_i = a\,(U - U_i)\exp(-b(U - U_i)) \text{ (формула Моргулиса)}, \qquad (8.4)$$

где a и b – эмпирические константы для конкретного газа. Зависимость суммарного сечения возбуждения имеет похожий вид:

$$S_r = S_{\max}\frac{U - U_r}{U_{\max} - U_r}\exp\left(1 - \frac{U - U_r}{U_{\max} - U_r}\right) \text{ (формула Фабриканта)}, \qquad (8.5)$$

где U_r – потенциал возбужденного уровня, U_{max} и S_{max} – энергия и сечение возбуждения в максимуме функции возбуждения, значения которых можно найти в справочных таблицах для конкретного газа. Время пребывания атома в возбужденном состоянии можно связать с числом переходов в единице объема в единицу времени N, тогда за промежуток времени dt число переходов: $Ndt = wn_a dt$, где w – вероятность данного перехода n_a - концентрация возбужденных атомов. Число актов излучения равно убыли числа возбужденных атомов: $Ndt = -dn_a$, тогда $dn_a = -wn_a dt$. Таким образом, число возбужденных атомов изменяется во времени по закону:

$$n_a(t) = n_{a0}\exp(-wt), \qquad (8.6)$$

где n_{a0} – концентрация возбужденных атомов в начальный момент времени. За время $t_0 = 1/w$ концентрация уменьшается в «e» раз. Это время и полагают временем пребывания атома в возбужденном состоянии. Несмотря на малость этой величины $t_0 \sim 10^{-8} \div 10^{-7}$ с, даже за столь короткое время существования возбужденного атома возможно получение новой порции энергии, достаточной для перехода атома на следующий уровень возбуждения, либо для ионизации атома, в этом случае говорят о *ступенчатой ионизации*. Именно такой процесс ступенчатой ионизации атомов ртути наблюдался в опытах Франка и Герца. Среди возбужденных состояний атомов и молекул существуют *метастабильные* состояния, времена жизни которых от 10^{-4} до нескольких секунд. Самый нижний метастабильный уровень называется *резонансным*. Для ртути резонансный уровень возбуждения равен 4.7 эВ, при превышении энергией электронов этого значения наблюдался первый провал в зависимости

тока от ускоряющего электроны потенциала. Метастабильная частица при столкновении с электроном может и *дезактивироваться*, то есть перейти в основное состояние, этот процесс называется *неупругим соударением второго рода*.

Кроме образования положительных ионов при протекании тока в газе возможно возникновение отрицательных ионов. Для того, чтобы отрицательный ион существовал и был устойчив, его внутренняя энергия E_i должна быть меньше, чем энергия нормального состояния пары атом – свободный электрон E_0. Разность $A = E_0 - E_i$ называется *сродством* атома к электрону. В атомах с заполненной внешней электронной оболочкой (инертные газы He, Ne, Ar, Xe, Kr,..) электронная оболочка экранирует ядро и вероятность образования отрицательных ионов мала. Атомы с неполными внешними оболочками (F, Cl, K, Na…), у которых оболочки ближе всего к заполнению, образуют наиболее устойчивые отрицательные ионы. Сродство этих атомов достаточно велико: $A_{F^-} = 3.4 \div 3.6$ эВ, $A_{Cl^-} = 3.82$ эВ. Если электрон до столкновения имел кинетическую энергию E_k, то при его захвате должна освобождаться энергия $A + E_k$. Эта энергия может освобождаться через излучение: $e + a \rightarrow a^- + h\gamma$, но более вероятен процесс образования отрицательного иона в результате столкновения трех тел $X + Y + e \rightarrow X^+ + Y^- + e$ или $X + Y \rightarrow X^+ + Y^-$.

Для описания электрического тока в газах недостаточно рассмотрения процессов ионизации и рекомбинации. Необходимо описание движения заряженных частиц под действием электрических и магнитных полей, причем статистическое, т. е. усредненное по многочисленным столкновениям. При наличии электрического поля на хаотическое движение частиц накладывается направленное движение вдоль поля. Для стационарного процесса распространения тока средняя энергия и средняя скорость электронов должны оставаться постоянными, несмотря на присутствие ускоряющего электрического поля. Это возможно, если электрическая сила компенсируется силой трения (электроны при столкновениях отдают часть своей энергии). Таким образом, средняя скорость движения от одного электрода к другому, которую называют *скоростью дрейфа* u_d, остается постоянной. Отношение скорости направленного движения (скорости дрейфа) заряженной частицы к напряженности электрического поля называется *подвижностью*:

$$b[\text{см}^2/(\text{В}\cdot\text{см})] = u_d/E. \qquad (8.7)$$

Скорость дрейфа можно оценить из предположения, что она много меньше тепловой скорости и в результате столкновения частица теряет всю кинетическую энергию. За время между столкновениями τ_{cm} заряженная частица пройдет путь $S = \frac{eE}{2m_e}\tau_{cm}$, $u_d = S/\tau_{cm}$, тогда:

$$b_e = \frac{e\overline{\lambda}_{cm}}{2mv_T}, \qquad (8.8)$$

где $\overline{\lambda}_{cm}$ - средняя длина свободного пробега, v_T - тепловая скорость. Для распределения Максвеллла усредненная по скоростям скорость дрейфа (формула Ланжевена):

$$\bar{u}_d[см/с] = \sqrt{\frac{2m_e}{\pi kT}}\frac{eE}{2m_e}\bar{\lambda}_{cm} = 0.64\frac{e\bar{\lambda}_{cm}}{m\bar{v}_T}E = 0.64\frac{e\bar{\lambda}_1}{m\bar{v}_T}\cdot\frac{E[В/см]}{p[мм.рт.ст.]}, \quad (8.9)$$

где $\bar{\lambda}_1 = p\bar{\lambda}_{cm}$ - средний пробег при давлении 1 мм.рт.ст. Для средней скорости дрейфа ионов формула Ланжевена имеет вид:

$$\bar{u}_d = a_i\frac{e\bar{\lambda}_{i1}}{m_i v_{iT}}\sqrt{1+\frac{m_i}{m_\mu}}\cdot\frac{E}{p}, \quad (8.10)$$

a_i – коэффициент, равный 0.5 ÷1, m_μ - масса молекулы иона.

Электроны на своем пути ионизуют атомы, «ионизующую» способность электронов англичанин Таунсенд предложил характеризовать коэффициентом α, названным впоследствии *первым коэффициентом Таунсенда*, равным числу электронов, создаваемых электроном на единице длины пробега. При таком описании прирост количества электронов пропорционален α и количеству атомов n: $dn(x) = \alpha n dx$. Тогда число электронов на расстоянии x:

$$n_e(x) = n_0\exp(\alpha x), \quad (8.11)$$

а первый коэффициент Таунсенда:

$$\alpha = (1/n)(dn/dx). \quad (8.12)$$

Процесс возникновения электронов можно также характеризовать *частотой ионизации* Y_i – число электронов, создаваемых одним электроном в единицу времени:

$$Y_i = (1/n)(dn/dt). \quad (8.13)$$

Тогда частота ионизации связана с первым коэффициентом Таунсенда через скорость дрейфа:

$$Y_i/\alpha = u_d$$

Все три величины α, Y_i, u_d зависят от напряженности электрического поля E. Сразу отметим, что $\alpha(E)$, $Y_i(E)$, $u_d(E)$ весьма сложные зависимости, меняются с изменением условий разряда, но для $Y_i(E)$ и $\alpha(E)$ всегда весьма сильные (экспоненциальные, степенные).

§50. Теория электронных лавин

В конце 80-х г. прошлого века немец Ф. Пашен экспериментально установил, что напряжение зажигания разряда $U_з$ зависит от произведения pd (где p – давление газа, d – расстояние между электродами) и имеет некое минимальное значение для данного газа и величины второго коэффициента

Таунсенда γ, (кривые Пашена на рис. 8.1). Для объяснения этого факта потребовалось количественное описание процесса размножения заряженных частиц в разряде. Первой количественной теорией газового разряда была *теория электронных лавин*, предложенная Таунсендом в самом начале 20-го века.

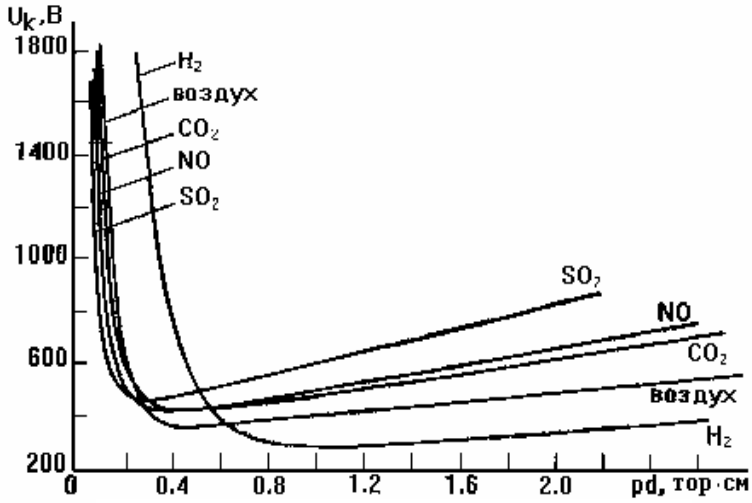


Рис 8.1. Кривые Пашена

Возникновение, развитие и существование разряда во времени и в пространстве

1) Развитие во времени.

Очевидно, что реально, помимо рождения в единицу времени на один первичный электрон Y_i электронов, некое количество электронов одновременно гибнет: а)прилипает к атомам и молекулам с частотой Y_a, б) диффундирует на стенки установки с частотой Y_d, в) рекомбинирует с ионами с коэффициентом рекомбинации β. Обычно рекомбинацию не учитывают, так что условием возникновения и развития разряда:

$$Y_i(E) > Y_d + Y_a \qquad (8.14)$$

а горения стационарного разряда:

$$Y_i(E) = Y_d + Y_a \qquad (8.15)$$

Это так называемый "стационарный критерий пробоя". По определению, $Y_d = 1/\tau_d$, где время диффузии τ_d зависит от коэффициента диффузии D и характерная диффузионная длина пробега электронов к стенкам λ_d : $\tau_d = \lambda_d^2/D$. Для цилиндра $1/\lambda_d^2 = (2.4/R)^2 + (\pi/L)^2$ (R и L – радиус и длина цилиндра); для параллепипеда: $1/\lambda_d^2 = (\pi/L_1)^2 + (\pi/L_2)^2 + (\pi/L_3)^2$ (L_1, L_2, L_3 – линейные размеры параллепипеда). Из выражений для частоты ионизации (8.13) и условия (8.14) можно составить феноменологическое соотношение баланса для плотности электронов:

$$dn_e/dt = n_e(Y_i(E) - Y_d - Y_a), \qquad (8.16)$$

откуда

$$n_e = n_{e0}\exp((Y_i(E) - Y_d - Y_a)t) = n_{e0}\exp(t/\theta), \qquad (8.17)$$

где θ - постоянная времени лавины. Очевидно, что развиваться лавина может только, если выполняется условие (8.14), и при неограниченном t лавина может развиваться произвольно долго. Но есть ситуации, когда t очень мало (особенно в лазерной искре), тогда необходимо большое превышение рождения электронов над гибелью, т. е. большое электрическое поле E (а в лазерной искре просто гигантское!). Из обобщенного критерия пробоя (8.17):

$$\theta^{-1}(E(t)) = Y_i(E) - Y_d - Y_a = \ln(n(t)/n_0)/t \qquad (8.18)$$

видно, что разряд приходит к стационарному при $t \to \infty$. На самом деле этот переход происходит раньше. Нарастание тока не безгранично, как это должно было быть по теории электронных лавин, а ограничивается объемным зарядом. Так как с ростом последнего при возникновении виртуального катода эффективное расстояние до анода сокращается, то на более короткой длине пролетного промежутка уменьшается вероятность ионизации атомов и молекул газа электронным ударом. В результате разряд переходит к стационарному.

2) Развитие в пространстве.

Предположим, что из катода вылетел один электрон. В сильном поле прикатодного слоя он быстро наберет энергию, достаточную для ионизации атома (молекулы) газа, после ионизации будет два медленных электрона (и один ион). Электроны так же ускорятся, каждый произведет ионизацию - станет их четыре - тоже ускорятся, ионизуют, станет восемь и т.д.- возникает лавина, идет цепной процесс (рис. 8.2).

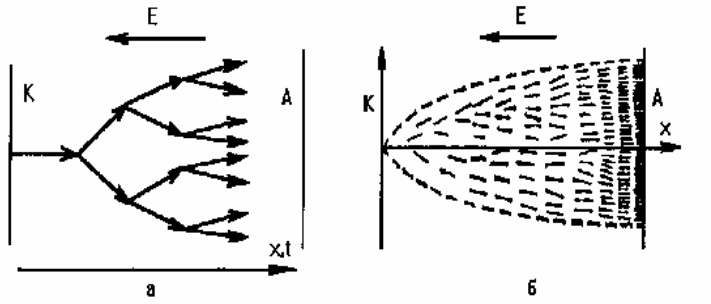


Рис. 8.2. Схемы (а) лавинного размножения электронов в промежутке между катодом К и анодом А и (б) диффузионного расплывания электронной лавины, которая рождается от электрона, вышедшего из определенного места катода

На расстоянии x первый электрон создаст ($e^{\alpha x}$ -1) электронных пар. Возникающие в промежутке электроны дрейфуют к аноду, ионы – к катоду. Приходящие на катод ионы способны выбивать из катода вторичные электроны. Для описания процесса ионно-электронной эмиссии Таунсендом был предложен второй коэффициент γ, равный числу вторичных электронов на один приходящий на катод ион (*второй коэффициент Таунсенда*) и зависящий от материала катода, чистоты его поверхности и др., обычно $\gamma = 10^{-4} \div 10^{-2}$. Таким образом, ионы пойдут к катоду, ускорятся и выбьют из катода $\gamma(e^{\alpha x} - 1)$ электронов. Даже если это будет всего один вторичный электрон, то процесс повторится, так что условием горения разряда будет:

$$\gamma(e^{\alpha x} - 1) \geq 1. \qquad (8.19)$$

Каждый вторичный электрон также ионизует атомы и рождает электроны ($e^{\alpha x}$ - 1). Нетрудно показать, если число первичных электронов n_0, длина промежутка

между катодом и анодом d, то после суммирования всех вторичных электронов в предположении $\gamma(e^{\alpha x} - 1) < 1$, число электронов, приходящих на анод, будет равно:

$$n = n_0 \cdot \frac{\exp(\alpha d)}{1 - \gamma(\exp(\alpha d) - 1)}. \qquad (8.20)$$

Величина

$$\mu = \gamma(\exp(\alpha d) - 1) \qquad (8.21)$$

называется *коэффициентом ионизационного нарастания*. При $\mu < 1$ ток будет затухать, условие $\mu = 1$ является условием перехода к самостоятельному разряду (*условие зажигания разряда*) и условием *стационарности разряда*. Картина упрощена и идеализирована, реально электроны гибнут (прилипают, рекомбинируют, диффундируют к стенкам), но и создаются на катоде не только ионной бомбардировкой, да и α = const только при E = const на всей протяженности d, но в действительности E в катодном слое существенно меняется. В конце прошлого столетия Таундсенд, проанализировав огромное число опытов, установил экспериментальную зависимость:

$$\alpha/p = A\exp(-Bp/E), \qquad (8.22а)$$

где A и B постоянные для данного газа и катода, p - давление, E - напряженность электрического поля. Такая зависимость может быть качественно объяснена тем, что вероятность пройти электрону без столкновений путь λ_i, на котором электрон набирает необходимую для ионизации энергию, пропорционален $\exp(-\lambda_i/\overline{\lambda}_{ст})$. Коэффициент Таунсенда $\alpha = N\exp(-\lambda_i/\overline{\lambda}_{ст})$, где $N = 1/\overline{\lambda}_{ст}$ - число соударений на 1 см пропорциональное давлению: $N = N_0 p$, N_0 – число столкновений электрона на 1 см пути при давлении, равном единице. С учетом того, что $\lambda_i = U_i/E$ получим соотношение, подобное (8.22а):

$$\alpha/p = N_0\exp(-N_0 U_i p/E), \qquad (8.22б)$$

Подстановка численных значений дает правильный порядок величин A и B.

Коэффициенты Таунсенда α и γ обладают тем свойством, что отношение α/p и γ не являются функцией по отдельности от напряженности электрического поля E и давления газа p, а зависит от их отношения: $\alpha/p = f_1(E/p)$ и $\gamma = f_2(E/p)$. Условие зажигания разряда, или условие, позволяющее определить *напряжение зажигания* $U_з$ имеет вид:

$$f_1\left(\frac{U_з}{pd}\right)\left(\exp\left(f_2\left(\frac{U_з}{pd}\right)\right) - 1\right) = 1. \qquad (8.23)$$

Из (8.23) видно, что напряжение зажигания $U_з$ является функцией произведения pd, и при $pd = const$ напряжение зажигания не меняется. Эта закономерность носит название *закон Пашена*. *Кривую Пашена* (см. рис. 8.1), отражающую

зависимость $U_з$ от pd, называют *характеристикой зажигания разряда*. Выражая α из условия зажигания разряда (μ = 1) с учетом (8.21) и подставляя в выражение (8.22а), можно получить:

$$E/p = B/(C + \ln(pd)),$$

где $C = \ln(A/(\ln(1/\gamma+1)))$. Приняв $U_з = Ed$, найдем зависимость напряжение зажигания от pd:

$$U_з = Bpd/(C + \ln(pd)),$$

которая и описывается кривыми Пашена. Важно, что существенны не p, d, E "отдельно", а "комбинации" pd (т.к. $p = n_g T_g$, где n_g и T_g - плотность и температура газа, если T_g = const, то pd определяет число ионизующих столкновений на пробеге d), и, особенно, E/p, т.е. как бы "напряженность поля на одну частицу газа". Минимум $U_з$ соответствует $(pd)_{\min}$:

$$(pd)_{\min} = (\bar{e}/A)\ln(1/\gamma + 1), \qquad (8.24)$$

где $\bar{e} \approx 2.72$ - не заряд электрона, а основание натурального логарифма. Соответствующее минимальное напряжение зажигания $U_{з\min} = B(1-C)$ зависит только от сорта газа и материала катода, минимум отношения $(E/p)_{\min} = B$ зависит только от сорта газа. Столетов, исследуя фотоэлектронную эмиссию, стремился подобрать давление газа для максимального фототока. Он обнаружил, что если уменьшать давление, то сила тока сначала увеличивается, а затем уменьшается, т. е. существует максимум тока по давлению. Если при этом менять от опыта к опыту разность потенциалов между катодом и анодом, то максимум тока всегда соответствует одному и тому же E/p. Проделав приведенные выше рассуждения, Таунсенд дал объяснение этому экспериментальному факту и назвал это *эффектом Столетова*, а значение $(E/p)_{\min}$ впоследствии назвали константой Столетова.

Расчеты удовлетворительно совпадают с экспериментальными кривыми Пашена (см. рис.8.1). Описательно кривые Пашена можно понять так: с уменьшением (pd) медленно растет E/p (правая ветвь на рис.8.1), значит, растет Y_i и для пробоя достаточно меньших $U_з$, и так до $U_{з\min}$. Дальнейшее уменьшение pd (левая ветвь) приводит к быстрому уходу электронов (мало столкновений) и для компенсации этого необходим быстрый рост E/p, т.е. потенциала пробоя $U_з$. Можно дать описание этой зависимости при фиксированном значении одной из величин p или d. Пусть давление уменьшается при постоянном d. Тогда с уменьшением давления увеличивается длина свободного пробега, т.е. увеличивается набираемая электроном энергия, а значит растет α. Далее с уменьшением p резко снижается число столкновений и α уменьшается. При постоянном давлении с уменьшением расстояния d увеличивается α, так как растет электрическое поле. Затем с уменьшением d коэффициент Таунсенда снижается из-за уменьшения длины развития лавины. Также описательно можно понять эмпирическую зависимость Таунсенда (8.22) и кривые Пашена (рис.8.1).

Темный (таунсендовский) разряд

Темный (таунсендовский) разряд – это электрический разряд в газах при низком давлении (порядка нескольких Торр) и очень малых токах (менее 10^{-5} А). Электрическое поле в разрядном промежутке однородно или слабо неоднородно, и не искажается пространственным зарядом, который пренебрежимо мал. Назван по имени Таунсенда, который в 1900 г. создал *теорию электронных лавин*, по которой при условии выполнения развития самостоятельного разряда (8.19) ток разряда должен неограниченно возрастать со временем. Реально же ток ограничен параметрами цепи. Очень малый ток таунсендовского разряда обусловлен большим сопротивлением внешней цепи. Если сопротивление внешней цепи снижать, увеличивая ток, то таунсендовский разряд переходит в тлеющий.

§51. Тлеющий разряд

Тлеющий разряд – это электрический разряд в газе, характеризующийся термодинамической неравновесностью и квазинейтральностью, возникающей в разряде плазмы. Эффективная температура электронов существенно выше температуры газа и электродов. Термоэмиссия практически отсутствует (электроды холодные). Свое название разряд получил из-за наличия около катода так называемого тлеющего свечения. Благодаря свечению газа тлеющий разряд нашел широкое применение в лампах дневного света, различных осветительных приборах и т.п. Классическая схема установки для изучения тлеющего разряда изображена на рис. 8.3, где 1- стеклянный баллон, диаметром 1-3 см, длинной до 1 м; 2 - катод; 3 - анод; 4 - балластное сопротивление (обязательный элемент); А – микро-, милли-, или просто амперметр. Баллон 1 можно откачать и затем заполнить выбранным газом до заданного давления. Обычно в разряде наблюдаются три визуально различимые области: а) прикатодная область, на ней падает напряжение U_k, обычно 200 ÷ 700 В; б) положительный столб - в физике тлеющего разряда пассивный элемент: сближая анод и катод можно ликвидировать положительный столб, разряд будет гореть; однако в технике положительный столб - полезный элемент: он светится в рекламных трубках, он и есть активная среда в газовых лазерах, напряжение на нем определяется именно техническими требованиями, например, длиной рекламных трубок; в) прианодный слой обычно очень тонкий, состоит из светящейся "пленки", и тонкого темного участка. Долго считали, что он тоже "пассивный", однако теперь доказано, что некоторые неустойчивости прямо связаны с ним. Падение напряжения на

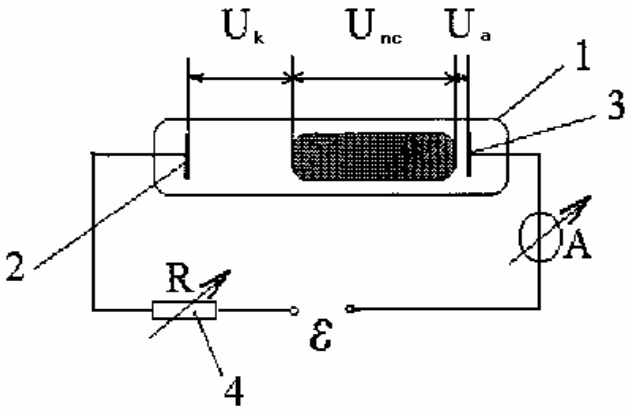


Рис. 8.3. Классическая схема для изучения газового разряда

анодном слое U_a невелико (10 ÷ 20 В) и обычно близко к потенциалу ионизации газа (очень чувствительно к состоянию поверхности анода).

Прикатодная область

Прикатодная область физически наиболее важный элемент тлеющего разряда: именно в нем образуется электронная лавина. В данном газе при данном давлении формируется длина прикатодной области d_k, равная нескольким длинам ионизации. Установившаяся длина d_k, обратно пропорциональная давлению p, такова, чтобы величина pd_k соответствовала минимальному значению U_k (природа экономна!). Основной характерной особенность тлеющего разряда является большое падение потенциала в прикатодной области U_k. – сотни вольт. Из катодного слоя в положительный столб уходит некоторое количество электронов с такой энергией, чтобы ионизовать в столбе достаточно атомов (молекул) для компенсации теряемых электронов, то есть U_k должно быть много больше потенциала ионизации атомов газа. Катодная область как бы "приклеена" к поверхности катода: если проводящей является только одна его поверхность, то при любом повороте катода разряд приходит только на нее - даже если ее повернуть на 180°, как бы спиной к аноду. Свечение катодной области "слоистое" (рис. 8.4). У самого катода находится темное "астоново пространство", связанное с тем, что электроны, вышедшие с катода, еще не набрали достаточной энергии для возбуждения атомов и молекул газа. Затем располагается область катодного свечения, в которой происходит интенсивное возбуждение различных уровней. Катодное темное пространство, возникает там, где энергия ускоренных электронов «переваливает» через значение в максимуме функции возбуждения, сечения возбуждения уменьшаются, количество возбужденных атомов падает. Далее электроны преимущественно ионизуют атомы, происходит лавинообразное размножение электронов, которые ускоряясь вновь вызывают возбуждение атомов. Появляется «тлеющее отрицательное свечение», благодаря которому тлеющий разряд и получил свое название. В возникающей в разряде плазме электрическое поле резко падает, электроны, растрачивая свою энергию, не приобретают в слабом поле достаточной для возбуждения атомов, возникает темное "фарадеево пространство". В области тлеющего свечения ($\rho \approx 0$) наиболее идеальная плазма. Так как электрическое поле $E \approx 0$ электроны переходят из области тлеющего свечения в фарадеево пространство главным образом за счет диффузии. Ионы попадают в прикатодную область также за счет диффузии. Ускоренные к катоду ионы выбивают вторичные электроны. Темное фарадеево пространство – это переходная область, в которой нет ионизации и возбуждения. По мере приближения к положительному столбу беспорядочное тепловое движение электронов все более преобладает над направленным движением. Описание всех процессов, объясняющих эту "слоистость" (и некоторые более тонкие эффекты) и сейчас является далеко не полным. Непонятно и еще одно явление: площадь токового пятна $S_п$ на катоде в нормальном режиме всегда определяется из соотношения $S_п = I/j_п$, где: I - полный ток, а $j_п$ – некоторая «нормальная плотность тока», постоянная для данного разряда. Это важное свойство тлеющего разряда называется *законом нормальной плотности тока*. При увеличении I (например, при снижении внешнего сопротивления R или повышении ЭДС источника $\mathcal{E}$) $S_п$ растет

пропорционально току до тех пор, пока токовое пятно не займет всю проводящую поверхность катода (и подводящих голых проводов). При этом катодное падение напряжение U_k остается постоянным. Дальнейшее повышение I приводит к росту U_k - это "аномальный режим" с *аномальным катодным падением потенциала*, а сам разряд переходит к *аномальному тлеющему разряду*. Почему $j_п$ = const - остается неизвестным.

Положительный столб

Если в установке на рис. 8.3 повышать ток, то в какой-то момент загорится разряд, причем между катодной областью и анодом появится свечение с длиной волны, характерной для данного газа, и занимающее все сечение трубки. Это и есть положительный столб, причем на нем будет падение напряжения, $U_{пс}$ = $\mathcal{E}$ - IR – U_k - U_a. Это единственная область разряда, которая может быть произвольной длины. Положительный столб представляет собой плазму с концентрацией частиц, убывающих от оси к стенкам, в нем идет интенсивный процесс ионизации и потери частиц на стенки, при этом положительный столб практически не дает ионов в катодную область. Уходящие на стенку электроны заряжают их отрицательно относительно оси, и ионы ускоряются на стенку, т. е. происходит амбиполярная диффузия. В итоге электроны и ионы на стенках рекомбинируют. Наличие радиального градиента приводит к тому, что эквипотенциали имеют выпуклую форму.

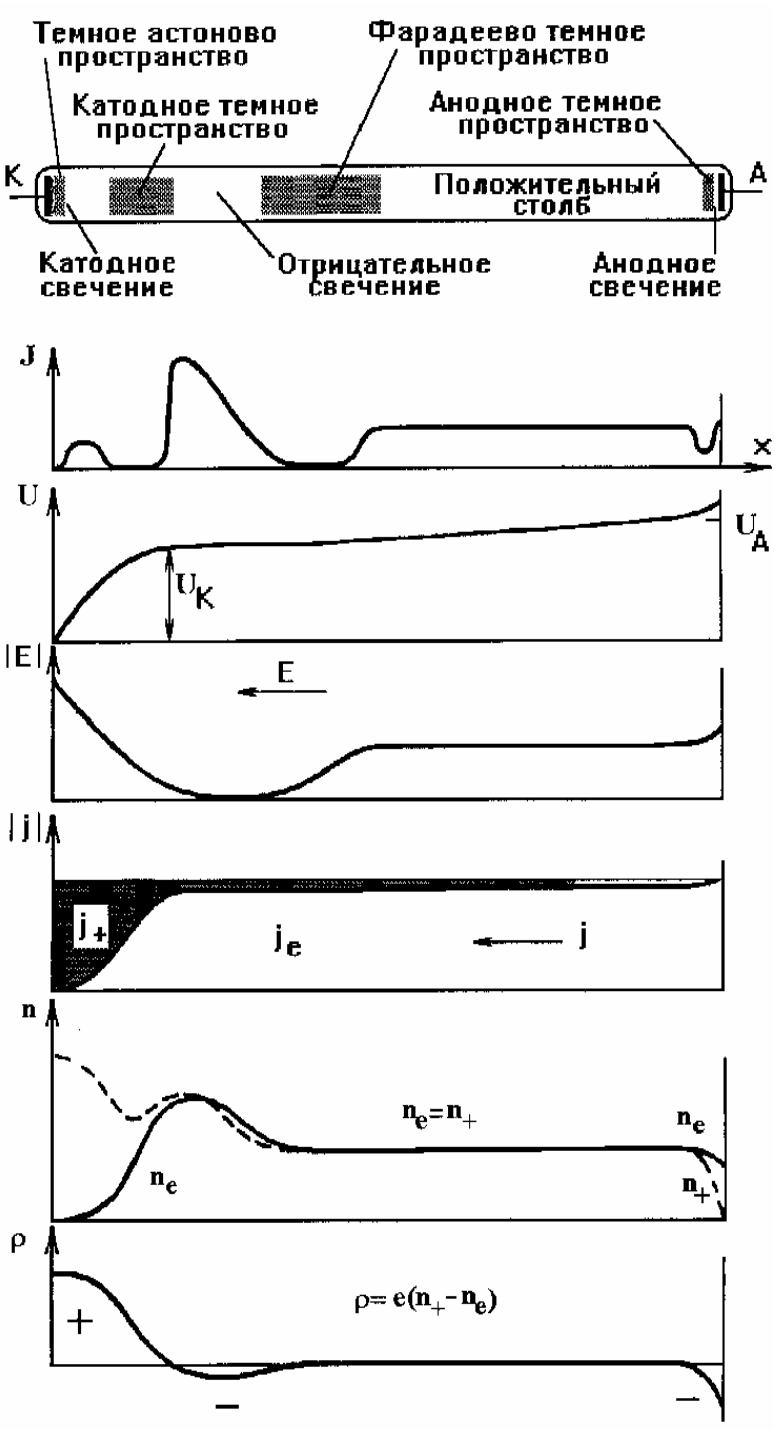


Рис. 8.4. Картина тлеющего разряда в трубке и распределения интенсивности свечения J, потенциала U, продольного поля E, плотностей электронного и ионного токов j_e, j_+, концентраций n_e, n_+ и объемного заряда $\rho = e(n_e - n_+)$

Особенно отчетливо это видно при возникновении в положительном столбе за счет колебательных процессов стоячих или бегущих страт. Процесс образования положительного столба довольно сложный, хотя его "назначение" – соединить катодный и анодный слои. Столб электрически нейтрален, так что плотности электронов и ионов (однозарядных) равны, а токи, соответственно, сильно различаются. Температура основной массы электронов $T_e = 1 \div 2$ эВ, а ионов практически равна температуре стенок (ионы быстро обмениваются поступательной энергией с газом), так что положительный столб термодинамически сильно неравновесен. Он очень неравновесен и в ионизационном отношении – для него справедлива формула Эльверта. Сближая катод и анод, можно ликвидировать положительный столб, но разряд будет гореть. Более того, анодным слоем можно пройти темное фарадеево пространство, но как только он соприкоснется с тлеющим слоем – отрицательное тлеющее свечение разряда погаснет. Сравнительно недавно было доказано, что свечение столба поддерживают относительно быстрые электроны (20 ÷ 30 эВ), ускоренные в катодной области и поступающие из катодного столба в количестве, как раз достаточном для компенсации потерь электронов в нем и обеспечения возбуждения газа. В рекламных трубках положительный столб следует за всеми их изгибами, что объясняется образованием поверхностных зарядов на внутренних стенках трубок и появлением соответствующих поперечных электрических полей. Если увеличивать давление, то происходит сжатие положительного шнура, температура и проводимость возрастают, ток растет, вызывая дополнительный разогрев. В результате роста температуры может начаться термическая ионизация и тлеющий разряд может перейти в дуговой. Так как это очень важная неустойчивость, рассмотрим ее механизм, правда, несколько упрощенно.

Неустойчивости положительного столба

Часто положительный столб "стратифицирован" – состоит из светлых и темных полос, обычно бегущих с такой скоростью, что визуально столб воспринимается сплошным. Это одна из неустойчивостей положительного столба, но не самая неприятная. Наиболее важная – так называемая "контракция" или "шнурование". При некотором предельном значении тока (предел зависит от многих конкретных условий) разряд в трубке собирается в тонкий ярко светящейся шнур, очень похожий на шнур дугового разряда (в англоязычной литературе называют arcing, "дугование"), но это еще не дуга, хотя температура ионов T_i поднимается до десятых долей электрон-вольт, так что отрыв T_e от T_i существенно уменьшается. Предположим, что флуктуативно произошло местное повышение плотности электронов $\delta n_e\uparrow$, как следствие вырастает плотность тока $\delta j\uparrow$ ($j = n_e e v$), проводимость $\delta\sigma\uparrow$ ($\sigma = n_e e^2/\tau$) и энерговыделение $\delta w\uparrow$ ($w = j^2/\sigma$). В результате возрастет температура газа $\delta T_g\uparrow$, уменьшится его плотность $\delta n_g\downarrow$ (так как давление $p_g = n_g T_g$ выравнивается быстро и его можно считать постоянным), возрастает отношение $\delta E/n_g\uparrow$, вырастает частота ионизации $\delta Y_i\uparrow$, возрастает $\delta n_e\uparrow$ – цепочка замкнулась:

$$\delta n_e\uparrow \to \delta j\uparrow \to \delta w\uparrow \to \delta T_g\uparrow \to \delta n_g\downarrow \to \delta E/n_g\uparrow \to \delta Y_i\uparrow \to \delta n_e\uparrow \to \ldots \quad (8.25)$$

идет рост j и T_g, образуется шнур. Неустойчивость называют "ионизационно-перегревной" (цепочка может начаться и со случайного локального возрастания температуры газа $\delta T_g \uparrow$).

Анодный слой

Анодный слой, всегда очень тонкий. Электроны ускоряются к аноду и ионизуют газ. Если ток на анод $I_a = \frac{1}{4} n_e e \bar{v}_e S$ больше разрядного тока в цепи ($I_a > I$), то анод заряжается отрицательно относительно положительного столба, в противном случае ($I_a < I$) положительно. Следует отметить, что в лазерных средах (при больших p и j) при повышении давления растет анодное падение потенциала, но сохраняется нормальная плотность тока, сравнимая с нормальной плотностью тока катода.

Газовые лазеры и тлеющий разряд

Появление газовых лазеров, универсальность их применения и стремление повысить энергосодержание лазерного луча привели к постановке и разрешению многих новых физико-технических проблем. Если использование тлеющего разряда в маломощных лазерах (есть лазеры мощности в доли милливатта, например, для хирургии глаза с целью приваривания сетчатки) потребовало лишь незначительно изменить конструкцию катода и анода (они стали проводящими кольцами на внутренних концах трубки (рис. 8.5), появились зеркала), то конструкция мощных лазеров стала совершенно иной.

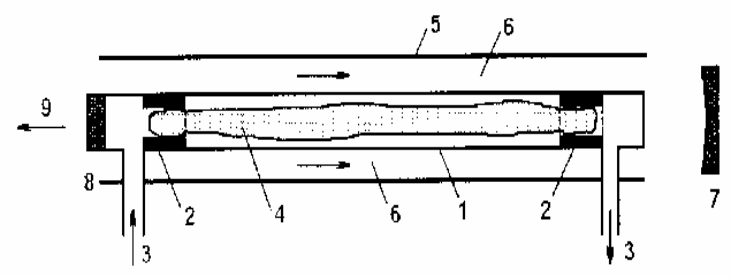


Рис. 8.5. Схема $C0_2$ - лазера небольшой мощности с диффузионным охлаждением: 1 – разрядная трубка, 2 – кольцевые электроды, 3 – медленная прокачка лазерной смеси, 4 – разрядная плазма, 5 – внешняя трубка, 6 – охлаждающая проточная вода, 7 – глухое зеркало, 8 – выходное полупрозрачное зеркало, 9 – выходящее излучение

При температуре активной газовой среды выше ~ 450 ÷ 500К энергия колебательных степеней свободы, обеспечивающих генерацию когерентного излучения, начинает очень быстро переходить в поступательные степени свободы, т.е. в тепло. Следовательно, недопустим нагрев более чем на 300 градусов, нужен очень интенсивный теплоотвод. Теплоотвод из больших объемов за счет теплопроводности газа обеспечить нельзя. Распространение получила идея непрерывной смены газа, появились быстропроточные лазеры, а рабочий объем в них создают две параллельные пластины, длиной и шириной в несколько десятков сантиметров. Разряд организуют или вдоль потока газа, или перпендикулярно ему (рис. 8.6). Так как в лазерный луч переходит не более 30% вкладываемой в разряд энергии, не менее 70% должен уносить газ, поэтому для мощных лазеров нужны очень большие потоки газа. Расчеты (и опыт) показывают, что в наиболее эффективных CO_2 лазерах на 10 кВт мощности

излучения надо "израсходовать" более 80 – 100 г/с. Ясно, что система газоотвода должна быть замкнутая с охлаждением газа (системы прокачки и холодильников): небольшая активная зона "обрастает" огромным вспомогательным, но неизбежным оборудованием.

Вторая особенность – борьба с контракцией: если вместо равномерно светящегося полного объема положительного "столба" образуется один или несколько шнуров с ионной температурой T_i в десятые доли эВ, то на такой плазме инверсной заселенности колебательных уровней быть не может. Одним из основных методов, применяемых практически во всех мощных лазерах, является разделение катодов таким образом, чтобы через каждый шел ток, меньший, чем нужно для контракции. У каждого катода свое балластное сопротивление R (см. рис. 8.3), так что если даже на каком-либо из них и будет

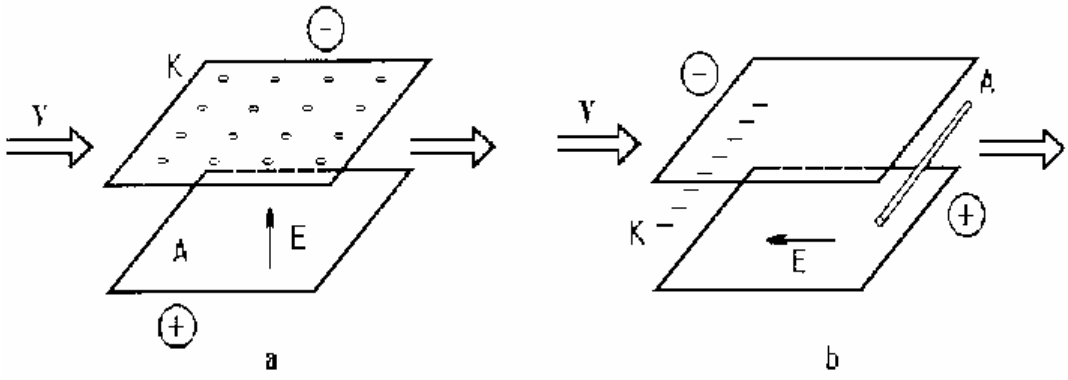


Рис.8.6. Типичная геометрия тлеющего разряда в электроразрядных лазерах на CO_2; а - поперечный разряд (ток идет перпендикулярно газовому потоку направления скорости); верхняя плата усеяна катодными элементами К, нижняя служит анодом А; б - продольный разряд, катодные элементы К расположены вверх по потоку, анодом А служит трубка

контракция, то это не существенно: катодов тысячи. Есть и другие методы, например, сделать импульсный разряд несамостоятельным и возбуждать пучком быстрых (Е ~ 100 кэВ) электронов, комбинировать постоянные и ВЧ, постоянные и импульсные напряженности электрических полей. Применение ВЧ и, особенно, импульсных электрических полей большой напряженности позволило резко увеличить энергосъем с единицы рабочего объема активной среды.

§52. Дуговые разряды

Электрической дугой называют установившийся (или почти установившийся) разряд, который характеризуется низким катодным падением потенциала и высокой плотностью тока на катоде ($j_k \geq 10 \div 10^2$ А/см^2). Такие формы разряда известны с 1802г. (Петров В.В.), но ряд особенностей не понятен и до сих пор. Не установилась еще даже общепринятая классификация дуговых разрядов, которые делятся по типу катодов и по давлению рабочего вещества. Так, по типу катода различают: а) подогревные; б) горячие; в) холодные; г) угольные; по давлению: а) низкого давления ($p \leq 10^{-3} \div 1$ атм); б) высокого ($p \sim 1 \div 5$ атм); г) сверхвысокого ($p > 10$ атм). В дуговом разряде можно различить:

1) прикатодный слой – тонкий, падение напряжения порядка потенциала ионизации (бывает даже меньше) атомов газа; 2) положительный столб, состояние и поведение плазмы в котором определяется балансом энергии; (температуры ионов T_i и электронов T_e в центральной части столба равны); в) анодный, тоже тонкий слой и тоже с малым падением напряжения на нем.

Дуги с подогревным катодом

Дуги с подогревным катодом это несамостоятельные разряды, используются в основном как выпрямители, управляемые включением - выключением разрядного напряжения (газотроны) или изменением фазового сдвига напряжений анода (или катода) и сетки (тиратроны). В дуге катодный слой только ускоряет электроны термоэмиссии настолько, чтобы они поддерживали нужную ионизацию газа. Образующаяся плазма как бы "приближает" анод к катоду, так что ограничение тока объемным зарядом ("закон 3/2" для вакуумного промежутка) в дуге нет. В результате при напряжении между анодом и катодом 10-20 В ток на порядки больше, чем был бы в вакууме.

Дуги с горячими катодами

Дуги с горячими катодами очень распространены. Они бывают от десятков миллиампер (лампы дневного света) до мегаампер (в электролитических ваннах для получения алюминия и магния). Прикатодная область горячего дугового разряда не проще прикатодной области тлеющего разряда, да и изучена явно хуже. Ускоренные непосредственно вблизи катода термоэмиссионные электроны в прикатодной области создают ион-электронные пары. Ионы ускоряются к катоду, на котором производятся 2 ÷ 9 термоэмиссионных электронов на один ион. Производство электронов ионами на катоде через тепло (термоэмиссия) энергетически значительно выгоднее, чем прямая ион-электронная эмиссия (как в тлеющем разряде), но возможно только при большой плотности тока. Катодом обычно служит или высокотемпературный металл (часто вольфрам) или расплав металла (ванны при производстве Al, Mg). Несмотря на низкое падение потенциала, электрическое поле около катода в дуге большое, так как плазма поджимает прикатодный слой к поверхности катода. Так, для плотностей тока $j \sim 10^3$ А/см^2 ток термоэмиссии возрастает за счет эффекта Шоттки в ~ 3 раза ($E_k \sim 10^6$ В/см). Однако токи в 10^8 А/см^2 объяснить термоэлектронной и автоэлектронной эмиссией катода невозможно, приходится делать предположения о взрывной эмиссии микроострий и о расплавлении поверхности катода и выбросе расплавленного металла в разрядный промежуток с последующей его ионизацией.

Дуги с холодными катодами

Дуги с холодными катодами – это по существу дуги с локальными термоэмиттерами: на катоде образуются токовые пятна, при чем плотность тока должна быть больше критической (для данного металла), иначе дуга гаснет. Это объясняется необходимостью концентрации энергии для получения электронов с катода. Плотности тока очень большие (у меди до 10^8 А/см^2!), данные опытов сильно различаются, а теоретического описания нет. Пятна хаотически бегают по катоду, попытки упорядочить их движения пока не дали результата. С 1903г.

известно, что если пятно поместить в магнитное поле H, перпендикулярное току j, то пятно побежит навстречу (!) вектору $\vec{j} \times \vec{H}$ ...Объяснения до сих пор нет. Нет полного понимания и механизмов электронной эмиссии: если для средних значений плотности тока ($j \sim 10^6$ А/см^2), расчетное поле Е ~ 10^7 В/см (у самого катода) - теория и эксперимент примерно совпадают, то ни для малых, ни для самых больших значений j необходимые для обеспечения соответствующей автоэлектронной эмиссии значения E оказываются неправдоподобно большими. Иногда пятна останавливаются (бывает надолго), в таком месте идет сильная эрозия (до дыр и прекращения разряда). Широко применяются катоды из ртути в выпрямителях - игнитронах. При падении напряжения ниже потенциала зажигания разряд должен погаснуть (нет тепловой "инерции" горячих катодов), его надо поджигать. Для этого вводят специальный дополнительный анод-"игнайтор", напряжение на который подают с нужным сдвигом по фазе. Каждый соответствующий полупериод в соответствующем игнитроне создаются "затравочные" пары ртути, инициирующие разряд. По терминологии [33] игнитрон, пожалуй, надо отнести к "вакуумным дугам" – без паров металла катода разряд не горит. "Вакуумные" дуги горят всегда с участием паров материала катода и имеют возрастающую вольт-амперную характеристику (ВАХ) (обычно ВАХ падающая).

Положительный столб дугового разряда

Положительный столб дугового разряда сильно зависит от рода газа, давления, силы тока. При малых давлениях ($p \leq 0.1$ атм) и силе тока ($I \sim 1$А) столб неравновесен ($T_e > T_i$) и сильно напоминает контрагированный шнур тлеющего разряда. Плазма паров металла, молекулярных газов, при давлении $p \geq 1$ атм всегда равновесна, характерное распределение (по радиусу столба) температуры и проводимости представлено на рис. 8.7. При обычном распределении тока температура будет иметь колокообразную форму, равномерно уменьшаясь от $T \sim (10 \div 12) \cdot 10^3$ К в центре до температуры стенки. Плотность электронов по радиусу спадает очень быстро – в равновесной плазме $n_e \sim \exp(-r/r_0)$ (а с ней и проводимость ($\sigma \sim n_e$)), так что токопроводящий канал сосредоточен у оси. На радиусе, большем r_o (рис. 8.7), проводимостью плазмы можно пренебречь. Однако связать количественно ток I, радиусы r_0 и R, мощность w удалось Штенбеку, только введя принцип минимума мощности "min w". При заданном токе I и радиусе R устанавливается

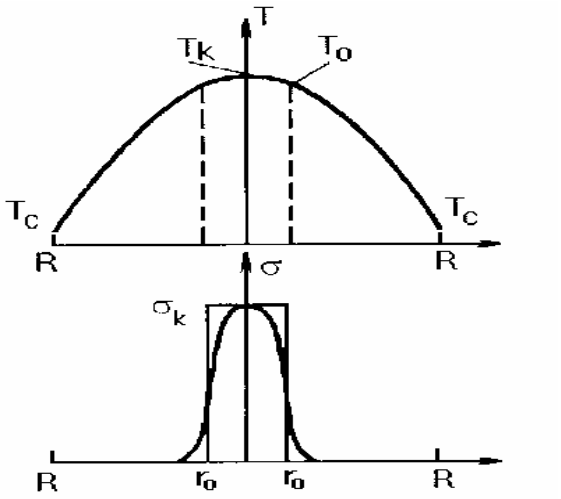


Рис. 8.7. Схематические распределения T и проводимости σ по радиусу столба дуги. Штриховая линия - замена $\sigma(r)$ ступенькой в каналовой модели

r_0 такое, чтобы выделяющаяся в разряде мощность была минимальной (позже доказали, что принцип " min w " справедлив не всегда, но в дуге справедлив). Существенно, что максимальная температура $T_к$ (см. рис.8.7) весьма слабо зависит от охлаждения дуги (важен только теплоотвод от катода) и растет с вкладываемой мощностью несколько медленнее, чем корень квадратный из мощности. При высоком давлении ($p \geq 10$ атм) и высокой температуре (Т ≥ 12000К) очень существенным оказывается охлаждение излучением, оно уносит до 90% мощности. В последние годы высокий световой КПД дуг высокого давления широко используют для освещения дорог.

Область анода

Область анода так-же, как и прикатодная, весьма тонкая, падение напряжения на ней зависит от режима работы анода, а их два. Первый режим - диффузный имеет место при большой площади анода и плотности тока $j \leq 10^2$А/см^2 , ток распределен по всему аноду и падение напряжения очень мало (1 ÷ 3 В) (и даже бывает отрицательным). Второй режим: если площадь анода мала (ток выходит на края и т.д.), то при некотором токе (зависит от многих причин) ток собирается в пятно (или пятна) с плотностью $j = 10^2$ А/см^2. Анодные пятна образуют правильные геометрические фигуры (!), иногда бегают, но тоже по упорядоченным траекториям (круги, овалы,...). Механизмы не известны.

Зажигание дуги

Зажигание дуги можно произвести, соединяя электроды (основные или вспомогательные, как в игнитроне), а затем разъединяя их. Процесс зажигания дуги при размыкании цепи (при разъединении электродов) объясняется локальным разогревом электродов вследствие возникновения между ними плохого контакта, когда из-за большого сопротивления происходит нагрев места контакта до термоэмиссии и разряд зажигается. Такой же процесс происходит и при размыкании тока в сильноточных выключателях с образованием вредных дуг, которые выжигают электроды. Другой способ образования дуги – это ионизация в межэлектродном промежутке при подаче повышенного напряжения и выбор формы электродов, способствующей разряду (обычно острие). Если в тлеющем разряде увеличивать силу тока (путем снижения внешнего сопротивления или повышая ЭДС источника $\mathcal{E}$), то при большой силе тока напряжение на электродах трубки начинает падать, разряд быстро развивается, превращаясь в дуговой. В большинстве случаев переход осуществляется скачком и нередко ведет к короткому замыканию.

Угольная дуга

Угольная дуга исторически известна с 1802 г., изучена, пожалуй, лучше всех других, причем конкретно в воздухе. Дуговые светильники, свеча Яблочкова, первые сварки, наваривание металлов велись с угольными дугами. Но у них был большой недостаток: один из электродов сгорал быстрее другого. Был изобретен ряд устройств, регулирующих подачу углей, их выпускала промышленность. Но в середине 19-го века Яблочков предложил перейти от постоянного тока к переменному: у генераторов заменить коллектор на

токосъемные кольца. Ток будет менять знак, угли будут гореть одинаково. С этого момента "борьба" постоянного тока (он и до сих пор нужен очень многим потребителям – от электричек при больших I, до электроники – при малых I) с переменным (его можно транспортировать, значит, строить мощные электростанции, что выгоднее) продолжалась примерно до 20-х гг. XX в. Конечно, победил переменный.

Плазма угольной дуги в атмосфере равновесная, хотя по ее длине температура меняется более чем в два раза (от 12000 до ~ 5000К). Катодное падение снижается вплоть до 10 В (!), анодное тоже порядка 10 В, остальное (несколько вольт) приходится на положительный столб. ВАХ до определенного значения тока падающая, затем напряжение скачком уменьшается, возникает шипение («шипящая дуга»), и ВАХ становится горизонтальной. Интересно, что катод ($T_к \approx 3500$ К) холоднее анода ($T_a \approx 4200$ К).

§53. Искровой и коронный, ВЧ- и СВЧ- разряды

Искровой разряд

Искровой разряд принципиально импульсный, его изучали и до появления источников тока: трением заряжали конденсаторы ("лейденские банки"), собирали атмосферное электричество в предгрозовых условиях. В России в XVIII в. работали М. Ломоносов и Г. Рихман, в Америке В.Франклин. Он предложил первое объяснение электрическим явлениям: электричество – "невесомая жидкость" (вроде "теплорода"), ее избыток – знак (+), недостаток – знак (-). Если соединить их проводником, то (+) потечет к (-)... Так, в электротехнике ток и до сих пор течет от (+) к (-)!.. Реальное изучение очень быстро протекающих искровых разрядов стало возможно с появлением камер Вильсона, приборов скоростного фотографирования, катодных осциллографов. Оказалось, что искра может загораться в плотном (давление порядка атмосферы и больше) газе при большой напряженности электрического поля. Первичная лавина быстро поляризуется – электроны отходят в сторону анода, а ионы практически стоят. При образовании лавины происходит много возбуждений с быстрым высвечиванием, фотоэффект создает новые электроны, новые лавины вблизи основной, они втягиваются в основную лавину, растет ее объединенный заряд, растет создаваемое им электрическое поле E. Когда это поле E примерно станет равным внешнему E_0, возникает тонкий проводящий канал – стример, соединяющий электроды (стример может быть направлен к любому электроду или сразу к обоим). Скорость распространения стримеров (более 10^8 см/с) гораздо больше скорости распространения электронных лавин, определяемой подвижностью электронов. Таким образом, для развития стримера необходимо выполнение двух условий: 1) поле лавины сравнивается с внешним полем ($E \sim E_0$); 2) излучение переднего фронта лавины достаточно для фотоионизации нужного количества атомов газа. Собственно стример слабопроводящий, но перед самым замыканием межэлектродного промежутка вдоль него проходит волна скачка потенциала, образуется хорошо проводящий канал, и уже по нему проходит большой ток – собственно искра. Газ в канале сильно нагревается, возникает скачок давления – звуковая волна (в молнии – гром). (Изложение весьма упрощенное, но более аккуратное намного длиннее, а полной ясности все равно нет...) Если межэлектродное расстояние большое, поле E

неоднородное, на конце стимера может образоваться хорошо проводящий участок - лидер (рис. 8.8), что характерно для молний, где последовательно образуется несколько лидеров, по существу, несколько разрядов с временными сдвигами в десятки миллисекунд.

Искровой разряд получил применение в промышленности, это так называемый "электроэрозионный" способ обработки металлов, запатентованный в ряде стран. Более подробно об искровом разряде см. [34].

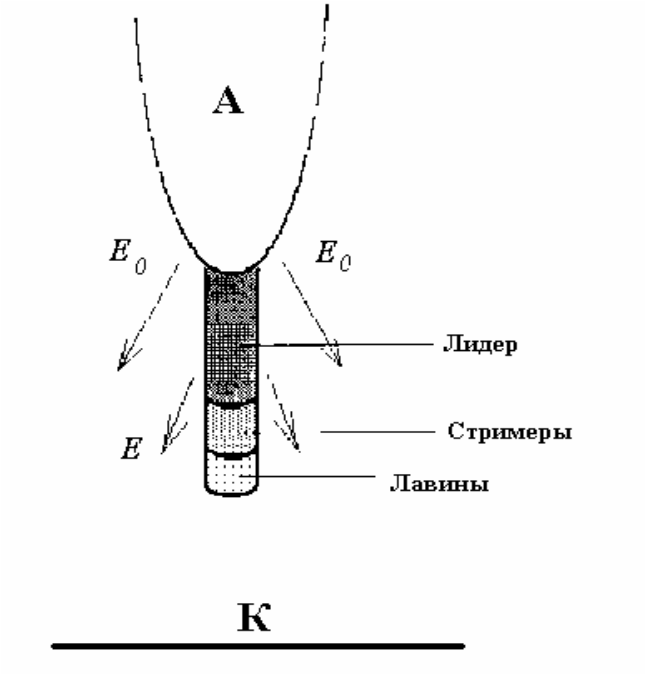


Рис. 8.8. Схема лидера, прорастающего от положительного острия по пути, проложенному стримерами, которые, в свою очередь, втягивают лавины

Коронный разряд.

Коронный разряд – самостоятельный разряд, который возникает только при условии очень большой неоднородности электрического поля хотя бы у одного из электродов (острие – плоскость, нить – плоскость, две нити, нить в цилиндре большого радиуса и т.д.). Условия возникновения и развития короны различные при разной полярности "острия" (назовем так электрод, вблизи которого E сильно неоднородно). Если острие – катод (корона "отрицательная"), то зажигание короны по существу происходит так же, как в тлеющем разряде, только для определения первого коэффициента Таунсенда α (так как поле E сильно неоднородное) в воздухе (практически важный случай) надо учитывать прилипание (наличие кислорода), так что

$$\int_0^{x_1} (\alpha(x) - a_n(x))dx = \ln(1+\gamma^{-1}), \qquad (8.26)$$

где x_1 – расстояние до точки, в которой E уже так мало, что ионизация не происходит: $E \approx 0$. В такой короне есть свечение только до расстояния, тоже примерно, равного x_1. Если "острие" - анод (корона "положительная"), то картина существенно меняется: около острия наблюдаются светящиеся нити, как бы разбегающиеся от острия (рис. 8.9). Вероятно, это стримеры от лавин, зарожденных в объеме фотоэлектронами. Очевидно, что и критерий зажигания другой – такой, как для образования стримера. В любом коронном разряде существенна неоднородность E, т.е. конкретная геометрия электродов.

Полной ясности в механизме горения разряда нет, но это не мешает применению коронных разрядов в промышленности (электрофильтры); в счетчиках Гейгер-Мюллера тоже работает коронный разряд. Но он бывает и вреден, например, на высоковольтных линиях (ЛЕП) коронные разряды создают

заметные потери. Короны бывают прерывистыми с различными частотами – у положительных до 10^4 Гц, у отрицательных – до 10^6 Гц – а это радиодиапазон, помехи. Механизм прерывистости разряда у положительной короны, видимо, связан с тем, что электроны стримеров втягиваются в анод, положительные остовы экранируют анод, новые стримеры не могут создаваться, пока остовы не уйдут к катоду. Тогда анод "откроется" и картина повторится. Для отрицательной короны существенно наличие в воздухе кислорода – немного отойдя от короны электроны прилипают к кислороду, отрицательные ионы экранируют острие, и пока они не уйдут к аноду, разряд прекращается. После ухода ионов разряд возникнет вновь и картина повторится.

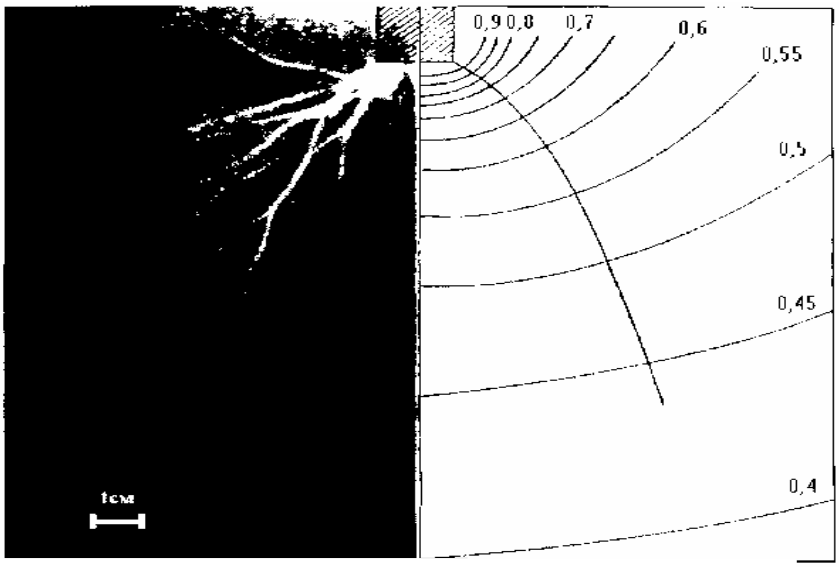


Рис. 8.9. Стример от положительного стержня диаметром 2 см на плоскость на расстоянии 150 см при постоянном напряжении 125 кВт; справа - расчет, проведены эквипотенциальные поверхности, цифры около кривых - доли от приложенного напряжения, отсчитанные от плоскости; слева - фотография стримеров в тех же условиях

Высокочастотные (ВЧ) разряды

В ВЧ-диапазоне ($10^{-1} \div 10^2$ МГц) принято различать $\widetilde{E}$ и $\widetilde{H}$ типы разрядов – по определяющему вектору электромагнитного поля. В лазерной технике используют $\widetilde{E}$ (емкостные) разряды, помещая рабочий объем в конденсатор, к пластинам которого подводят ВЧ-напряжение (пластины иногда прямо вводят в объем, иногда изолируют диэлектриком – обычно стеклом). Мощности этих разрядов небольшие (их задача поддержать ионизацию), но напряженности $\widetilde{E}$ велики – до десятков кэВ. Применение ВЧ индукционных полей ($\widetilde{H}$-полей) уже с конца 40-х г. стало весьма широким, хотя, в основном, в виде ВЧ-печей. Везде, где нужно чистое тепло и

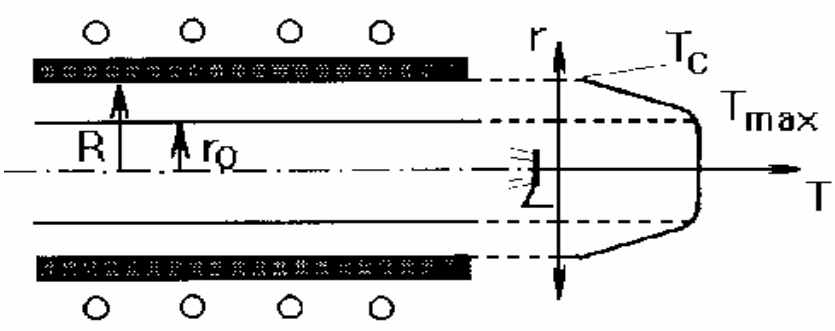


Рис. 8.10. Индукционный разряд в трубке радиусом R, вставленной в длинный соленоид; r_0 - радиус плазмы, справа – распределение температуры по радиусу

есть проводящая среда, $\widetilde{H}$ поля незаменимы. Это и производство полупроводниковых материалов, и зонная плавка чистых металлов, и сверхчистые химические соединения и даже бытовые печи. Правда, в этих устройствах почти нет необходимости согласования генератора и нагрузки – соотношение реактивного и активного сопротивлений нагрузки меняется мало. А вот в разрядах дело сложнее: изменение параметров среды разряда (сопротивление, самоиндукция, взаимоиндукция – связь с индуктором) могут меняться в широких пределах. Обычно индуктор – катушка (бывает и один виток!), внутри которой и происходит разряд (рис. 8.10).

Переменное $\widetilde{H}$ поле направлено вдоль оси катушки, поле $\widetilde{E}$ аксиально к ней. Для поддержания разряда нужное $\widetilde{E}$ существенно меньше, чем для его зажигания. Поэтому обычно вводят в объем тонкий металлический электрод, он разогревается, дает термоэлектроны (иногда частично испаряется), инициирует разряд, после чего его удаляют. Во время работы мощность вводится потоком электромагнитной энергии:

$$<S> = (c/4\pi)<EH> , \qquad (8.27)$$

а отводится чаще всего потоком газа (он ионизуется и уносит энергию). Но электромагнитная энергия проникает в плазму (проводник) на глубину x, спадая по экспоненте $\exp(-x/\delta)$, где δ – так называемый скинслой, и его условились считать глубиной проникновения потока:

$$\delta^2 = c^2/(2\pi\sigma\omega), \qquad (8.28)$$

где σ – проводимость проводника, ω – частота ВЧ поля. Очевидно, режим работы установки зависит от соотношения R и величины δ. Если $\delta < R$, то энергия поглощается, в слое толщиной δ, образуя проводящий цилиндр. Распределение по радиусу температуры T и проводимости σ представлены на рис. 8.11, по существу, это полный аналог каналовой модели дуги, ее называют "моделью металлического цилиндра". Следует отметить, что реально можно управлять давлением p (желательно побольше!) и потоком <EH>, определяемым

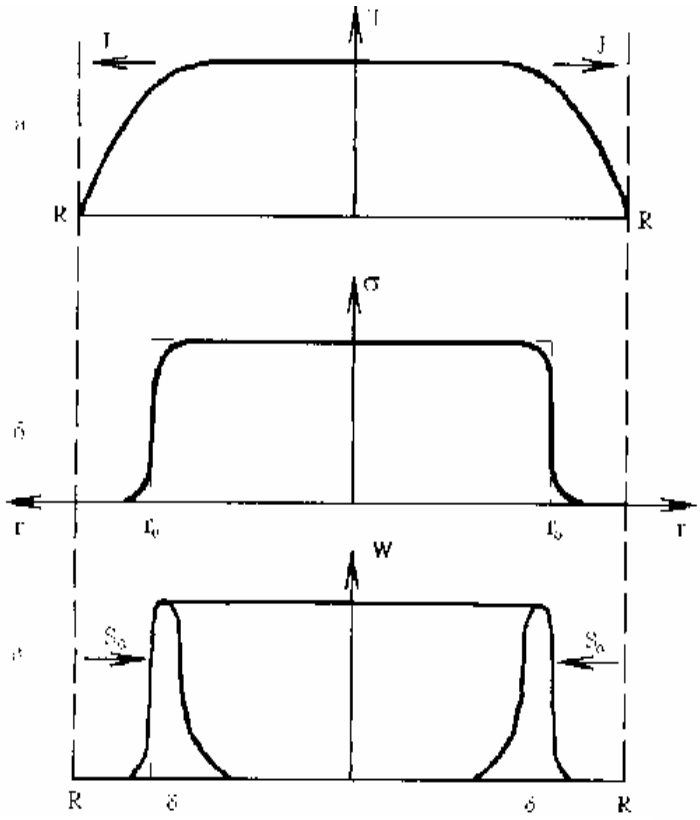


Рис. 8.11. Схематические распределения по радиусу температуры (а), проводимости (б) и джоулева тепла (в) в индукционном разряде; штриховая линия - замена $\sigma(r)$ ступенькой в модели металлического цилиндра, J – тепловой поток, S_0 - поток электромагнитной энергии, δ - толщина скин-слоя

ампервитками: <EH> ~ *IN* (где *I* – ток, *N* – число витков на единицу длины индуктора).

СВЧ-разряды

Такие разряды начали применять главным образом в моделях термоядерных установок (не очень успешно на стадии разряда) и в плазмохимических установках. При высоких частотах (гигогерцы) существенны геометрические соотношения, важны преломления и отражения электромагнитной волны. СВЧ-энергия весьма дорогая, но оказывается, что используя разряд в СВЧ-плазмотронах можно ввести в плазму до 90% СВЧ энергии [35]. Наиболее используемые в настоящее время схемы СВЧ-разрядов приведены на рис. 8.12. Следует отметить, что в схеме (рис. 8.12) почти вся мощность поглощается в струе газа (превращающейся в плазму): внешняя поверхность столба плазмы и внутренняя поверхность волновода образуют коаксиальную линию для электромагнитной волны – энергия в столб втекает по радиусу (как в ВЧ-разряде). Интересно отметить, что механизм пробоя в СВЧ (но не ВЧ!) диапазоне похож на механизм пробоя в тлеющем разряде (образование лавин, стационарный критерий пробоя (8.19), кривые зависимости E = f(p) - аналоги кривых Пашена, сравнимость пороговых значений E/p), о нем подробно можно прочитать в [33].

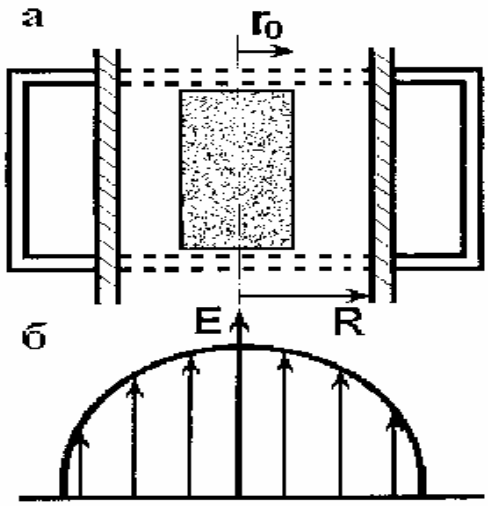


Рис. 8.12. Схема разряда в волноводе, поддерживаемого H_{01} волной: а) сечение волновода диаметральной плоскостью трубки, плазма затенена; б) распределение E вдоль широкой стенки волновода

Оптический пробой

Оптический пробой – лазерная искра, самый молодой вид газового разряда. Впервые наблюдался в 1963г. в фокусе луча гигантского рубинового лазера с мощностью 30 МВт длительностью импульса $3\cdot10^{-4}$ с, в электрическом поле $E \approx 6\cdot10^{6}$ В/см. Явление было неоднозначным, привлекло широкое внимание и уже изучено не хуже других разрядов. К лазерной искре применим нестационарный критерий пробоя (8.17), причем роль потерь электронов Y_a и Y_d может даже оказаться не существенной – время очень мало, все определяет создание электронов, лавин. Но вот "затравочный" электрон может родиться в результате многофотонного фотоэффекта (по существу квантового явления). Интересно, что есть большое сходство процессов пробоя в оптическом и СВЧ диапазонах – например, расчеты порогов пробоя и сравнение их с экспериментом.

Развитие лазеров и повышение их мощности привело к тому, что еще в 1976г. у нас смогли зажечь "искру" в воздухе длинной 8 м, а рекордные длины были больше десятка метров.

Список цитированной литературы.

1. Романовский М.К. Элементарные процессы и взаимодействие частиц в плазме. – М: Изд. МИФИ, 1984.
2. Zhdanov S.K., Kurnaev V.A., Pisarev A.A. Lectures on Plasma Physics. M: MEPhI, 1998.
3. Александров А.Ф., Рухадзе А.А. Лекции по электродинамике плазмоподобных сред. М: Изд. МГУ, 1999.
4. Фортов В.Е., Якубов И.Т. Неидеальная плазма. М: Энергоатомиздат, 1994.
5. Физическая энциклопедия \под ред. Прохорова А.М. \, т.2. М: Советская энциклопедия, 1990.
6. Физические величины. Справочник\под ред. Григорьева И.С., Мейлихова Е.З.\. М: Энергоатомиздат, 1991.
7. Смирнов Б.А. Физика слабоионизованной плазмы. М.: Наука, 1978, с.132, задача 2.23.
8. Алексеев Б.В., Котельников В.А. Зондовый метод диагностики плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1988.
9. Франц-Каменецкий Д.А. Лекции по физике плазмы. - М.: Атомиздат, 1964.
10. Арцимович Л.А. Управляемые термоядерные реакции. - М.: Физматгиз, 1961.
11. Трубников Б.А. Теория плазмы. - М.:Энергоатомиздат, 1996.
12. Лукьянов С.Ю., Ковальский Н.Г. Горячая плазма и управляемый ядерный синтез. - М.:МИФИ, 1997.
13. Брагинский С.И. Вопросы теории плазмы. - М.: Атомиздат, 1963, т.1, с.208-209.
14. Галеев А.А., Сагдеев Р.З. Вопросы теории плазмы. - М.: Атомиздат, 1973.
15. Тамм Е.И. Основы теории электричества. - М.: Гостехиздат, 1946, с.432.
16. Леонтович М.А., Осовец С.М. - Атомная энергия, 1956, №3.
17. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. - М: Наука, 1976.
18. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. - М: Высшая школа, 1978.
19. Иванов А.А. Физика сильнонеравновесной плазмы. - М.: Атомиздат, 1977, с.11-23.
20. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика (Серия: «Теоретическая физика», том X). - М: Наука, 1979.
21. Кингсеп А.С. Введение в нелинейную физику плазмы. - М: Изд. МФТИ, 1996.
22. Кадомцев Б.Б. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. - М.:Изд.АН СССР, 1958.
23. Шафранов В.Д. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. - М.: Изд.АН СССР, 1958, т.2
24. Райзер Ю.П. Основы современной физики газоразрядных процессов, Москва, Наука, 1980
25. Димитров С.К., Фетисов И.К., Лабораторный практикум по физике газоразрядной плазмы и пучкрв заряженных частиц, МИФИ, 1989
26. Арцимович Л.А., Лукьянов С.Ю. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях, М. 1972.
27. Глазер, Основы электронной оптики, Москва, 1957, стр.64
28. Кельман В.М., Явор С.Я., Электронная оптика, Москва, 1959, с.125
29. Капцов Н.А., Электроника, Москва, 1956, стр.138
30. Грановский В.Л. Электрический ток в газах, Москва, 1971.
31. Добрецов Л.Н., Гамаюнова М.В., Эмиссионная электроника, Москва, 1966.
32. Протасов Ю.С., Чувашев С.Н., Физическая электроника газоразрядных устройств, Москва, 1992, с.352
33. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М: Наука, 1992.
34. Лодзинский Э.Д., Фирсов О.Б. Теория искры. М: Атомиздат, 1975.
35. Русанов Д., Фридман А.А. Физика химически активной плазмы. М: 1984.