3. КОМБИНАЦИОННЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ СХЕМЫ

Комбинационной логической схемой называется устройство, у которого логические сигналы на выходе связаны с входными сигналами *так же,* как значения соответствующей этой схеме *логической функции* связаны со значением ее аргументов:

$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$

Комбинационные логические схемы представляют в виде:

1. Математического алгебраического выражения (булево выражение).
2. В виде таблицы истинности (в ней указаны все возможные комбинации сигналов на входах и соответствующие сигналы на выходе).
3. В виде структурной электронной схемы (которая визуально показывает функциональную связь между логическими элементами).

Алгебраическое выражение (булево выражение) представляют в виде:

1. Дизъюнкции (суммы)

$y = z_1 + z_2 + \ \ldots + z_n$

2. Конъюнкции (произведения)

$y = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \ \ldots \cdot z_n$

ДНФ – Дизъюнктивная нормальная форма

Дизъюнктивная нормальная форма – это функция, представляющая собой дизъюнкцию (сумму), у которой каждое слагаемое представляет собой конъюнкцию (логическое произведение) входных переменных или их дополнений (инверсий)

$y = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$

Каждый z_i – это произведение входных переменных или их дополнений.

Правила построения комбинационной логической схемы:

1. Формируем входные шины ($x1$, $x2$, $x3$ …).

1а. Формируем дополнения входных переменных ($x1$, $x2$, $x3$……)

2. Формируем каждый входной элемент схемы «ИЛИ».

ДНФ в общем случае избыточна, существует минимальная форма, к ней можно свести ДНФ, при этом осуществляется минимизация электронной схемы.

КНФ

Конъюнктивная нормальная форма – это функция, представляющая собой произведение, каждый член которого представляет собой сумму входных переменных или их дополнений. КНФ в общем случае избыточна, существует минимальная форма, к ней можно свести КНФ, при этом осуществляется минимизация электронной схемы.

Правила построения комбинационной логической схемы:

1. Формируем входные шины (*x*1, *x*2, *x*3 ...).

1a. Формируем дополнения входных переменных.

2. Формируем каждый входной элемент схемы «И». Ими являются выходы элементов «ИЛИ», на входы которых подаются входные сигналы.

Упрощение комбинационных логических схем

Исходную схему можно упростить:

A. На основе правил булевой алгебры.

B. На основе таблицы истинности.

C. С помощью карты Карно.

Важно уметь осуществлять преобразование булева выражения в таблицу истинности и, наоборот, уметь по таблице истинности записывать соответствующее булево выражение.

Преобразование булева выражения в таблицу истинности:

1. Записываем в таблицу истинности все возможные комбинации входных сигналов.

2. В соответствие с заданной функцией вычисляем выходной сигнал.

Преобразование таблицы истинности в булево выражение:

1. Записываем таблицу истинности.

2. Выбираем строки, для которых функция равна «1» .

3. Записываем выражение для этой строки в виде конъюнкции. Причем переменная, равная «1», записывается в прямом виде. Переменная, равная «0», записывается в инверсном виде.

4. Булево выражение записывается как дизъюнкция выбранных строк.

Таблица 3.1

Пример некоторой таблицы истинности

*x*3	*x*2	*x*1	*y*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Для таблицы истинности, представленной выше, булево выражение будет иметь вид:

$$y = x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3.$$

Карты Карно (диаграммы Вейча)

Карты Карно предназначены для решения задачи минимизации булевых выражений.

Обозначим через n – число переменных в булевом выражении. Карты Карно представляют собой таблицу, состоящую из 2n клеток. В карте Карно столько клеток, сколько комбинаций можно составить из прямых и инверсных значений переменных. При n = 2 будет 4 клетки, при n = 3 будет 8 клеток, при n = 4 будет 16 клеток и т.д. Карты Карно построены так, что в ее соседние клетки попадают смежные члены функции – члены, отличающиеся значением формы переменной: в один член эта переменная входит в прямой форме, а в другой эта переменная входит в инверсной форме. Благодаря этому получается наглядное представление о различных вариантах «склеивания» различных членов.

Процедура упрощения булева выражения.

1. Записывается булево выражение в дизъюнктивной форме конъюнкций.

2. Заносится 1 в те клетки, для которых имеются соответствующие сомножители.

3. Объединяются (соседние) единички прямоугольными контурами, охватывающими или 2, или 4, или 8, или 16 (и т.д) клеток.

4. Проводятся упрощения, путем исключения членов, дополняющих друг друга внутри контура.

Оставшиеся члены записываются в дизъюнктивной форме. Одна и та же «1» может входить в разные контуры, так как функция не меняется, если добавляется уже рассмотренный член, так как справедливо X+X=X.

Упражнение: Используя карты Карно, упростить следующее логическое выражение:

$$y = \overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_2} + x_1x_2$$

Таблица 3.2

Карта Карно для двух переменных

	x_2	$\overline{x_2}$
x_1	1	1
$\overline{x_1}$	1	

Решение: В горизонтальном контуре «склеивается» переменная x_2

В вертикальном контуре «склеивается» переменная x_1

В итоге имеем минимальную форму:

$y = x_1 + x_2$

Карты Карно с тремя переменными (8 комбинаций входных переменных)

Пример возможной реализации Карты Карно с тремя переменными разберем на следующей задаче. Требуется упростить логическое выражение:

$$y = \overline{x_1}x_2\overline{x_3} + x_1\overline{x_2}x_3 + x_1x_2\overline{x_3} + x_1\overline{x_2x_3}$$

Таблица 3.3

Карта Карно для трех переменных

	x_3	$\overline{x_3}$
$x_1\overline{x_2}$	**1**	**1**
x_1x_2		**1**
$\overline{x_1}x_2$		**1**
$\overline{x_1x_2}$		

Решение: В горизонтальном контуре «склеивается» переменная x_3 и остается $x_1\overline{x_2}$, в вертикальном контуре склеивается переменная x_1 и остается $x_2\overline{x_3}$. Минимальная форма будет: $y = x_1\overline{x_2} + x_2\overline{x_3}$

Карты Карно с четырьмя переменными (16 комбинаций входных переменных)

Пример возможной реализации карты Карно с четырьмя переменными разберем на следующем примере. Требуется упростить следующее логическое выражение:

$$y = x_1\overline{x_2x_3x_4} + \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 + \overline{x_1x_2x_3}x_4 + \overline{x_1x_2}x_3x_4 + \overline{x_1}x_2x_3x_4 + x_1\overline{x_2x_3}x_4$$

Таблица 3.4.

Карта Карно для четырех переменных

	$\overline{x_3x_4}$	$\overline{x_3}x$	x_3x_4	$x_3\overline{x_4}$
$\overline{x_1x_2}$		1	1	
$\overline{x_1}x_2$		1	1	
x_1x_2				
$x_1\overline{x_2}$	1	1		

Решение: В верхнем контуре «склеивается» переменная x_2 и x_3, остается $\overline{x_1}x_4$, в нижнем контуре «склеивается» переменная x_4 и остается $x_1\overline{x_2x_3}$. Минимальная форма будет равна:

$y = \overline{x_1}x_4 + x_1\overline{x_2x_3}$.

Карты Карно. Нестандартные ситуации.

Случай вертикальной симметрии. В картах Карно возможны случаи, когда имеются контуры, расположенные на границе карты, тогда карту нужно свернуть в вертикальный цилиндр, в котором левый край совмещается с правым.

Случай горизонтальной симметрии. В картах Карно возможны случаи, когда имеются контуры, расположенные на границе карты, тогда карту нужно свернуть в горизонтальный цилиндр, в котором верхний край совмещается с нижним.

Рассмотрим еще одну часто встречающуюся ситуацию. В картах Карно возможны случаи, когда 4 угловых ячейки карты рассматриваются как связанные друг с другом, тогда карту нужно свернуть в шар.

Контрольные вопросы

1. Чем отличаются простые высказывания (события) от сложных высказываний (событий)?
2. Приведите определения логических функций ИЛИ, И, НЕ.
3. Приведите математическую запись и обозначения на схемах логических элементов: дизьюнктор, коньюнктор, инвертор.
4. Приведите таблицу истинности логической функции ИЛИ.
5. Приведите таблицу истинности логической функции И.
6. Приведите таблицу истинности логической функции НЕ.
7. Что такое и какой набор логических функций называют базисом?
8. Что такое дизъюнктивная нормальная форма записи?
9. Что такое конъюнктивная нормальная форма записи?
10. Что такое комбинационная логическая схема?
11. Как преобразовать таблицу истинности в булево выражение?
12. Опишите процедуру упрощения булева выражения с помощью карт Карно.