1. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ЦИФРОВОЙ ЭЛЕКТРОНИКЕ

Человек в своей деятельности использует десятичную систему счисления. При этом работа компьютера и других средств вычислительной техники основана на *двоичной системе счисления*, которая в общем случае неудобна для восприятия человеком. В этом разделе мы рассмотрим подробнее системы счисления, которые используются в цифровой электронике, и покажем их связь с десятичной системой.

В процессе эволюции человечества потребность в счете всегда играла огромную роль, и не сразу человечество стало использовать десятичную систему. Древние ацтеки и майя использовали двадцатеричную систему. В древнем Шумере и древнем Вавилоне использовались двенадцатеричная и шестидесятеричная системы счисления. В Римской империи использовались так называемые римские цифры и система счисления, которая является характерным примером непозиционной системы счисления (обозначения чисел римским цифрами иногда используется и в наше время, например, для нумерации глав в книгах, обозначения годов и т.п.). После падения Римской империи в Европе начался переход к привычной нам десятичной позиционной системе счисления и записи чисел арабскими цифрами. В приведенной ниже таблице приведено соответствие основных числительных и их написание римскими цифрами.

Десятичные числа	1	2	3	5	10	50	100	500	1000
Римские числа	I	II	III	V	X	L	C	D	M

Произвольное промежуточное число между приведенными в таблице числительными получается путем простого сложения (или вычитания) базовых римских цифр (символов), например:

$$153 \Rightarrow \text{CLIII}, \quad 47 \Rightarrow \text{XLVII} \quad \text{и т.д.}$$

Очевидно, что римские цифры неудобны для записи больших чисел. Однако основной недостаток римских числительных – трудность их математических преобразований, например, умножения и деления. Это обусловлено коренным недостатком римской системы счета – тем, что она является непозиционной системой счисления. Перейдем к общему описанию систем счисления и связанной с ними терминологии.

Система счисления – это определенная система кодирования чисел, в которой используются специальные символы и правила их соединения в код для обозначения количества каких-либо объектов. Коротко говоря, система счисления – это совокупность символов (цифр) и правил для записи с их помощью произвольных чисел.

Существуют непозиционные и позиционные системы счисления. В *непозиционной* системе счисления значение символа, обозначающего то или иное число, не зависит от его позиции относительно других символов числа. Промежуточное число получается путем простого суммирования (соединения символов) без учета их веса, например:

$$153 = (100) + (50) + (3) = \text{CLIII}$$

Позиционная система счисления – система счисления, в которой значение каждого числового знака (цифры) в записи числа зависит от его места, или позиции (разряда), в этом числе (отсюда название – позиционная система счисления).

Позиционная система счисления основана на суммировании цифр с учетом их веса, зависящего от позиции в числе. Например, обратите внимание, что три числа: 153, 351, 513, записанные одинаковыми цифрами, дают разный результат.

Основание системы счисления, m – это количество используемых для записи чисел символов. Так, в десятичной системе счисления используется десять символов ($m = 10$):

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

В *двоичной* системе счисления используется только два символа ($m = 2$): 0, 1

Наряду с десятичной и двоичной системами иногда применяются другие системы – восьмеричная и шестнадцатеричная системы.

В *восьмеричной* системе счисления используется 8 символов ($m = 8$):

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

В *шестнадцатеричной* системе счисления используется 16 символов ($m = 16$):

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Для различения записи чисел в разных системах основание системы счисления указывают в виде нижнего индекса в конце числа, например:

- 250_{10} – запись числа в десятичной системе счисления;

- 376_8 – в восьмеричной системе счисления;
- 1011_2 – в двоичной системе счисления;
- $A962_{16}$, либо $A962_H$, $A962_h$ – в шестнадцатеричной системе счисления (*H, h* – от англ. *Hexadecimal*).

Основные правила

- Любое число N в системе счисления с основанием m записывается в виде последовательности символов:

$$N_m \Rightarrow k_s k_{s-1} \ldots k_p \ldots k_2 k_1 k_0, \quad (1)$$

где k_s – старший разряд; k_0 – младший разряд (нулевой разряд)

- Число объектов в любой системе счисления равно сумме всех последовательных произведений символов и их весов:

$$\{N_m\} = k_s m^s + k_{s-1} m^{s-1} + \ldots + k_p m^p + \ldots + k_2 m^2 + k_1 m^1 + k_0 m^0; \quad (2)$$

после небольшого упрощения получаем формулу:

$$\{N_m\} = k_s m^s + k_{s-1} m^{s-1} + \ldots + k_p m^p + \ldots + k_2 m^2 + k_1 m + k_0 \quad (3)$$

- Величина m^p – называется *весом* p-го разряда;
- Коэффициент k_p – должен удовлетворять условию:

$$0 \le k_p < m$$

Переход из одной системы счисления в другую

Переход из любой системы счисления в десятичную осуществляется по формуле:

$$\{N_m\} = k_s m^s + k_{s-1} m^{s-1} + \ldots + k_p m^p + \ldots + k_2 m^2 + k_1 m + k_0 \quad (4)$$

Рассмотрим перевод числа из двоичной в десятичную систему счисления.

Пример:

$101010101_2 = ?_{10}$

Решение:

$1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 64 + 0 \cdot 128 + 1 \cdot 256 =$

$1 + 0 + 4 + 0 + 16 + 0 + 64 + 0 + 256 = 341_{10}$

Рассмотрим перевод числа, наоборот, из десятичной системы в двоичную систему. Этот перевод можно осуществить двумя способами.

Первый способ:

Обозначим через N – преобразуемое число, K – результат преобразования.

1) N целочисленно делим на 2, остаток k_0 – будет младшим разрядом числа K,

2) Результат деления (частное) снова целочисленно делим на 2, остаток k_1 – будет следующим разрядом числа K,

3) Шаги данной процедуры повторяются до тех пор, пока частное, полученное в результате очередной операции деления, не станет равным 0. Тогда остаток от последнего деления используется в качестве старшего разряда:

$$K = k_s\, k_{s-1} \ldots\ldots\, k_1\, k_0$$

Пример:

1) $217_{10} = ?_2$
2) 217 : 2 = 108 (1) – младший разряд
3) 108 : 2 = 54 (0)
4) 54 : 2 = 27 (0)
5) 27 : 2 = 13 (1)
6) 13 : 2 = 6 (1)
7) 6 : 2 = 3 (0)
8) 3 : 2 = 1 (1)
9) 1 : 2 = 0 (1) !! - старший разряд
10) $217_{10} = 11011001_2$

Проверка 1+ 8 + 16 + 64 + 128 = 217.

Второй способ основан на использовании значения весов. Определяются те разряды, для которых весовые коэффициенты k_p не равны 0:

1) Находим максимальный разряд s, для которого выполняется:
$m^s <= N < m^{s+1}$, тогда $\kappa_s = 1$ (значит, все $k_{i>s} = 0$).

2) Находим разность $N = N - m^s$.

3) В соответствие с п.1 определяем следующий ненулевой весовой коэффициент. Проделываем п.1 до тех пор, пока промежуточное N не станет равным 0.

Переход из десятичной системы в произвольную систему с основанием «m»

Обозначим через N – преобразуемое число, K – результат преобразования

1) N целочисленно делим на «m», остаток k_0 – будет младшим разрядом числа K,

2) Результат деления (частное) снова целочисленно делим на m, остаток k_1 – будет следующим разрядом числа K.

3) Шаги данной процедуры повторяются до тех пор, пока частное, полученное в результате очередной операции деления, не станет равным 0. Тогда остаток от последнего деления используется в качестве старшего разряда:

$$K = K_s\, K_{s-1} \ldots K_1\, K_0$$

Пример:

1) $151_{10} = ?_8$
2) 151 : 8 = 18 (7) – младший разряд
3) 18 : 8 = 2 (2)
4) 2 : 8 = 0 (2) !! – старший разряд
5) $151_{10} = 227_2$

Проверка $2 \cdot 64 + 2 \cdot 8 + 7 \cdot 1 = 151$

Восьмеричная система счисления

Основание кода $m = 8$: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Каждый восьмеричный символ от 0 до 7 может быть представлен 3-разрядным двоичным числом (триадой) (табл. 1.1). В соответствие с приведенной таблицей удобно использовать простое правило перевода двоичных чисел в восьмеричный код: сначала двоичное число (двоичный код) разбивается на *триады*, начиная с младшего разряда (т.е. на отдельные группы из 3-х символов). Затем триады последовательно заменяются соответствующей восьмеричной цифрой. Таким образом образуется восьмеричный код.

Таблица 1.1

Соответствие восьмеричного и двоичного кода

Двоичный код (триада)			Восьмеричный код (восьмеричная цифра)
вес разряда. 2^p			
4	***2***	***1***	
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	2
0	1	1	3
1	0	0	4
1	0	1	5
1	1	0	6
1	1	1	7

Шестнадцатеричная система счисления

Основание кода $m = 16$: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.
Каждый символ от 0 до F может быть представлен 4-х разрядным двоичным числом (тетрадой).

Правило перевода двоичных чисел в шестнадцатеричный код числами: двоичное число (двоичный код) разбивается на *тетрады*, начиная с младшего разряда. Затем тетрады заменяются соответствующим шестнадцатеричным кодом (шестнадцатеричной цифрой).

Таблица 1.2

Соответствие шестнадцатеричного и двоичного кода

Двоичный код				Шестнадцатеричный код (цифра)
Вес разряда				
8	***4***	***2***	***1***	
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	2
0	0	1	1	3
0	1	0	0	4
0	1	0	1	5

0	1	1	0	6
0	1	1	1	7
1	0	0	0	8
1	0	0	1	9
1	0	1	0	A
1	0	1	1	B
1	1	0	0	C
1	1	0	1	D
1	1	1	0	E
1	1	1	1	F

Сложение двоичных чисел

Рассмотрим сложение двух четырехразрядных чисел *a* и *b* на следующем примере:

a3a2a1a0 + b3b2b1b0 = c4c3c2c1c0

Правила сложения в младшем разряде:

*a*0 + *b*0 = *c*0 (при этом возможен перенос 1 в следующий разряд):

0 + 0 = 0
1 + 0 = 1
0 + 1 = 1
1 + 1 = 0 (перенос 1 в следующий старший разряд)

Правила сложения в произвольном разряде

В следующих разрядах правила такие же, но необходимо учитывать возможный перенос (обозначен символом «п») из *предыдущего* разряда:

0 + 0 + 1 (п) = 1
0 + 1 + 1 (п) = 0 (перенос «1» в следующий разряд)
1 + 0 + 1 (п) = 0 (перенос «1» в следующий разряд)
1 + 1 + 1 (п) = 1 (перенос «1» в следующий разряд)

Вычитание двоичных чисел

Вычитание двоичных чисел рассмотрим на следующем примере:

a3a2a1a0 – b3b2b1b0 = c3c2c1c0

Правила вычитания в младшем разряде: *a*0 – *b*0= *c*0 (возможен заем из следующего разряда):

0 – 0 = 0

1 – 0 = 1

0 – 1 = 1 (заем из следующего разряда)

1 – 1 = 0

Правила вычитания в произвольном разряде

В следующих разрядах правила такие же, но необходимо учитывать возможный заем из *предыдущего* разряда:

0 - 0 - 1 (з) = 1 (заем «1» из следующего разряда)

0 – 1 - 1 (з) = 0 (заем «1» из следующего разряда)

1 – 0 - 1 (з) = 0

1 – 1 - 1 (з) = 1 (заем «1» из следующего разряда)

Умножение двоичных чисел

Правила умножения в одном (единичном) разряде:

0 × 0 = 0

1 × 0 = 0

0 × 1 = 0

1 × 1 = 1

Умножение многоразрядных чисел: A ×B = C

A (множимое) – *i*-разрядное число.

B (множитель) – *k*-разрядное число.

Операция умножения состоит из *k* циклов:

• В каждом цикле множимое умножается на содержимое соответствующего разряда множителя. Получаем частичное произведение.

• Каждое последующее частичное произведение сдвигается на 1 разряд влево. Результат умножения представляет собой сумму частичных произведений.

Преобразование дробей

Процедура преобразования дробей состоит из нескольких этапов.

1. Определяется первый разряд после запятой: дробь умножается на 2; если произведение меньше 1, то записывается «0»; если произведение больше 1, то записывается «1», а из произведения вычитается 1.

Если произведение равно 1, записывается «1» и вычисления прекращаются.

2,3,…Аналогично определяется значение следующих разрядов.

Сложение в системе счисления с произвольным основанием m = p

Если a0 + b0 ≥ p, то происходит перенос 1 в следующий разряд:

c0 = a0 + b0, если a0 + b0 < p

c0 = a0 + b0 – p, если a0 + b0 ≥ p с переносом 1

Для произвольного i-го разряда правила те же, только нужно учитывать возможный перенос из предыдущего разряда.

Вычитание в системе счисления с произвольным основанием m = p

Если a0 < b0, то происходит заем 1 в следующем разряде:

c0 = a0 – b0, если a0 ≥ b0

c0 = a0 – b0+p, если a0 < b0 с заемом 1 в следующем разряде.

Для произвольного *i*-го разряда правила те же, только нужно учитывать возможный заем из предыдущего разряда.

Умножение в системе счисления с произвольным основанием m = p

A × B = C

A (множимое) – *i*-разрядное число.

B (множитель) – *k*-разрядное число.

Операция умножения состоит из *к* циклов. В каждом цикле множимое умножается на содержимое соответствующего разряда множителя. Получаем частичное произведение. Каждое последующее частичное произведение сдвигается на 1 разряд влево. Результат умножения представляет собой сумму частичных произведений.

В следующей таблице дан пример таблицы умножения в системе счисления *m* = 8 (умножение чисел от 1 до 7):

Таблица 1.3

Таблица умножения для системы счисления $m = 8$

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	10	12	14	16
3	3	6	11	14	17	22	25
4	4	10	14	20	24	30	34
5	5	12	17	24	31	36	43
6	6	14	22	30	36	44	52
7	7	16	25	34	43	52	61

Положительные и отрицательные числа

Для указания знака двоичного числа используются старший разряд, который называют *знаковым разрядом*. Значение «0» в этом разряде соответствует знаку «+», «1» соответствует знаку «–».

Пример. Двоичное представление числа 5 есть 101. 8-разрядный двоичный код числа +5 записывается как 0000 0101.

Способы записи отрицательного двоичного числа

Кроме указания знака числа, для удобства последующих преобразований с числами в цифровой электронике и целочисленной вычислительной технике широко используется запись отрицательных двоичных чисел не в обычном (прямом) коде, а в специальном коде – это так называемые «обратный код» и «дополнительный код». Рассмотрим эти способы.

Метод «*обратный код*». Запись отрицательного числа этим способом осуществляется путем последовательной замены (инверсии) каждого разряда соответствующего положительного числа: значение «1» меняется на «0», и наоборот, «0» меняется на «1».

Пример. Двоичное представление числа 5 есть 101, его 8-разрядное двоичное представление 0000 0101. Соответственно, обратный 8-разрядный двоичный код числа -5 есть 1111 1010.

Таким образом, для преобразования отрицательного числа в положительное применяется простая операция инвертирования. Этим обратные коды удобны в применении. В качестве недостатка следует отметить, что в обратных двоичных кодах имеются два кода записи числа 0:

«положительный нуль» 0000 0000 и «отрицательный нуль» 1111 1111 (приведены 8-разрядные обратные коды). Это приводит к некоторой неопределенности и усложнению операции суммирования. Поэтому в дальнейшем для записи знаковых целых чисел перешли к другому способу – дополнительным кодам.

Метод «*дополнительный код*» («двойное дополнение», «точное дополнение»). В этом методе сначала вычисляется обратный код числа. Затем к обратному коду прибавляется 1 (см. таблицу ниже).

Дополнительный код позволяет упростить арифметические операции над двоичными числами без дополнительных преобразований.

Таблица 1.4

Соответствие десятичного представления числа и различных кодов записи двоичного представления.

Десятичное представление	Двоичное представление (8 бит)		
	прямой код	обратный код	дополнительный код
127	0111 1111	0111 1111	0111 1111
---	---	---	---
1	0000 0001	0000 0001	0000 0001
0	0000 0000	0000 0000	0000 0000
-0	1000 0000	1111 1111	0000 0000
-1	1000 0001	1111 1110	1111 1111
-2	1000 0010	1111 1101	1111 1110
-3	1000 0011	1111 1100	1111 1101
-4	1000 0100	1111 1011	1111 1100
-5	1000 0101	1111 1010	1111 1011
-6	1000 0110	1111 1001	1111 1010
-7	1000 0111	1111 1000	1111 1001
-8	1000 1000	1111 0111	1111 1000
-9	1000 1001	1111 0110	1111 0111
-10	1000 1010	1111 0101	1111 0110
-11	1000 1011	1111 0100	1111 0101
-127	1111 1111	1000 0000	1000 0001
-128	---	---	1000 0000

Контрольные вопросы

1. Назовите основные системы счисления, дошедшие до наших времен с древности.
2. В чем отличие между позиционными и непозиционными системами счисления?
3. Что такое основание системы счисления?
4. Что такое вес определённого разряда числа?
5. Как осуществляется переход из десятичной системы в двоичную и наоборот?
6. Сколько символов в восьмеричной системе и сколько символов в шестнадцатеричной?
7. Что такое триада, тетрада?
8. Назовите правила сложения двух чисел для единичного разряда.
9. Назовите правила вычитания двух чисел для единичного разряда.
10. Назовите правила умножения двух чисел для единичного разряда.
11. Приведите правило арифметических операций с многоразрядными числами.
12. Назовите способы записи отрицательного числа. Поясните термины «прямой код», «обратный код», «дополнительный код». В чем назначение и удобство использования «обратного кода» по сравнению с прямым кодом и «дополнительного кода» по сравнению с «обратным кодом»?