НАО «Восточно-Казахстанский технический университет имени Д. Серикбаева»

Дисциплина «Методы оптимизации»

ЛЕКЦИЯ 7

Классический метод одномерной оптимизации и метод дихотомии

Образовательная программа 6B06103 Математическое и компьютерное моделирование

Объём: 2 академических часа. **Место в рабочей программе:** лекция 7.

Цель: научиться находить экстремумы функции одной переменной с помощью производных и выполнять численный поиск минимума методом дихотомии с обоснованной точностью.

План занятия: необходимые и достаточные условия экстремума; поиск глобального минимума на отрезке; алгоритм дихотомии; вывод оценки погрешности и числа итераций; подробный числовой пример; реализация и самостоятельные задания.

Результаты обучения: студент различает стационарную точку и точку минимума, исследует границы допустимой области, обосновывает унимодальность, выбирает параметры дихотомии, вычисляет первые итерации вручную и проверяет численный результат по отрезку неопределённости.

1 Классический и численный подходы

Рассмотрим задачу $f(x) \to \min$ при $x \in [a; b]$. В предыдущей лекции были введены понятия минимума, унимодальности и отрезка неопределённости. Теперь изучим два способа решения: аналитическое исследование функции и последовательное сокращение области поиска [1].

Классический метод использует производные: сначала определяются кандидаты на экстремум, затем исследуется их характер. Для поиска глобального минимума на отрезке необходимо дополнительно учитывать его концы и допустимые точки недифференцируемости. Если уравнение для стационарных точек нельзя решить явно, внутри классического подхода также применяют численные методы.

Метод дихотомии сравнивает значения функции в двух близких точках около середины текущего отрезка. Производные для выполнения алгоритма не нужны. Однако для гарантированного исключения части отрезка необходимо заранее обосновать форму функции, например её строгую унимодальность.

У одной задачи можно получить аналитическое решение и затем проверить численный алгоритм на известном ответе. Такой подход особенно полезен в учебных исследованиях: совпадение конечного числа с ожидаемым ответом дополняется проверкой промежуточных отрезков и оценки ошибки.

2 Необходимое условие внутреннего экстремума

Пусть x^* — внутренняя точка области определения, функция дифференцируема в этой точке и имеет в ней локальный минимум. Тогда

$$f'(x^*) = 0.$$

Обоснование. Для достаточно малых положительных h имеем $f(x^* + h) - f(x^*) \geq 0$, поэтому отношение этой разности к h неотрицательно. При отрицательных h отношение неположительно. Если двусторонняя производная существует, оба предела совпадают; общее значение одновременно неотрицательно и неположительно, то есть равно нулю. Для локального максимума доказательство аналогично [1, § 2].

Точку, в которой производная равна нулю, называют **стационарной**. Стационарность является необходимым условием внутреннего дифференцируемого экстремума, но не достаточным. Для $f(x) = x^3$ производная в нуле равна нулю, однако функция возрастает по обе стороны и экстремума нет.

Также нельзя считать стационарными все точки, в которых производная не существует. У $f(x) = |x|$ минимум достигается в нуле, но $f'(0)$ не определена. Такая точка рассматривается отдельно и проверяется по определению или по поведению функции слева и справа.

Граница области. У $f(x) = x$ на $[0; 1]$ минимум достигается при $x = 0$, хотя производная равна единице. Для минимума на левом конце при существовании правой производной необходимо $f'_+(a) \geq 0$, а на правом конце при существовании левой производной — $f'_-(b) \leq 0$. Эти неравенства относятся к минимуму относительно допустимого отрезка и сами по себе не гарантируют глобальное решение.

3 Достаточные признаки и вырожденные случаи

3.1 Изменение знака первой производной

Пусть функция непрерывна в окрестности x^* и дифференцируема в проколотой окрестности. Если слева производная отрицательна, а справа положительна, функция сначала убывает, затем возрастает. Следовательно, в x^* достигается строгий локальный минимум. Переход знака с плюса на минус соответствует строгому локальному максимуму.

Если знак производной при переходе через стационарную точку не меняется, экстремума в этой точке нет. Этот признак позволяет исследовать случаи, когда вторая производная обращается в ноль.

3.2 Признак по второй производной

Пусть f дважды непрерывно дифференцируема в окрестности x^* и $f'(x^*) = 0$. Если $f''(x^*) > 0$, точка является строгим локальным минимумом; если $f''(x^*) < 0$ — строгим локальным максимумом.

Действительно, разложение Тейлора в стационарной точке имеет вид

$$f(x^* + h) - f(x^*) = \frac{1}{2} f''(x^*) h^2 + o(h^2).$$

При достаточно малом ненулевом h знак разности определяется знаком второй производной, поскольку $h^2 > 0$. Если $f''(x^*) = 0$, данный признак не даёт ответа: требуется другой способ исследования.

Функция	Производные в нуле	Поведение в нуле
x^2	$f'(0) = 0, f''(0) = 2$	Строгий минимум
$-x^2$	$f'(0) = 0, f''(0) = -2$	Строгий максимум
x^3	$f'(0) = f''(0) = 0$	Экстремума нет
x^4	$f'(0) = f''(0) = 0$	Строгий минимум

3.3 Первая ненулевая производная более высокого порядка

Пусть f имеет непрерывные производные до порядка m в окрестности точки, причём

$$f'(x^*) = \cdots = f^{(m-1)}(x^*) = 0, \qquad f^{(m)}(x^*) \neq 0.$$

Тогда ведущий член приращения равен $f^{(m)}(x^*)h^m/m!$. Если m чётно, положительный коэффициент даёт строгий минимум, отрицательный — строгий максимум. Если m нечётно, приращение меняет знак вместе с h и экстремума нет.

Этот признак применяется, когда **существует конечный порядок первой ненулевой производной**. Для некоторых бесконечно гладких функций все производные в точке равны нулю; тогда решение вопроса требует непосредственного исследования. Например, функция, равная $\exp(-1/x^2)$ при $x \neq 0$ и нулю при $x = 0$, имеет строгий минимум в нуле, несмотря на нулевые производные всех порядков.

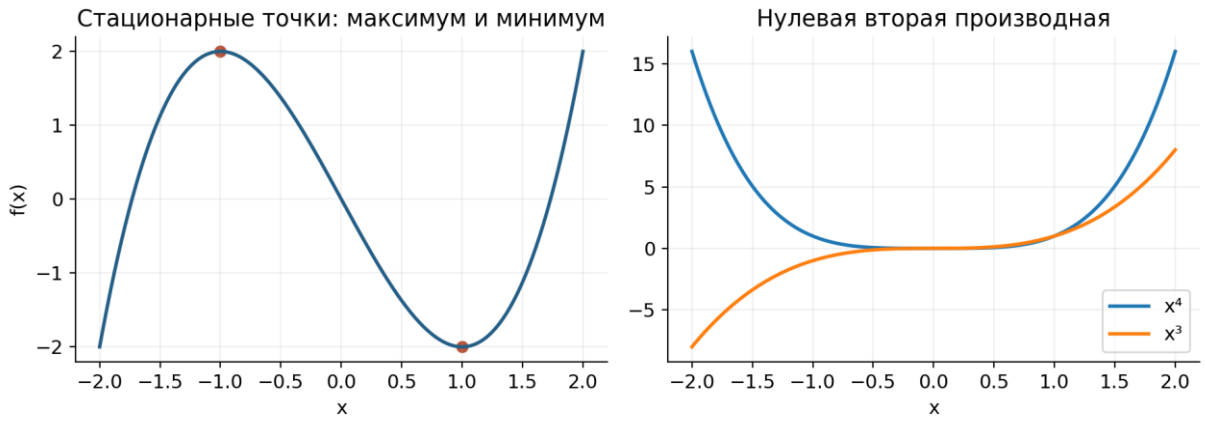


Рисунок 1 — Разные типы стационарных точек и необходимость дополнительного исследования при нулевой второй производной.

4 Глобальный минимум на отрезке

Если функция непрерывна на замкнутом ограниченном отрезке, минимум существует. Для кусочно гладкой функции с конечным числом критических точек применяется следующая последовательность действий.

1. Проверить область определения и допустимость концов отрезка.
2. Найти все внутренние точки, в которых $f'(x) = 0$.

3. Добавить внутренние точки, в которых функция определена, но производная не существует.
4. Добавить оба конца отрезка.
5. Вычислить значения функции во всех кандидатах и выбрать наименьшее. Если оно достигается в нескольких точках, указать их все.

Если уравнение стационарности имеет бесконечно много решений или функция имеет более сложную структуру, перечисление конечного списка кандидатов уже не является готовой процедурой. Тогда используются дополнительные свойства, оценки или разбиение области.

Пример 1. Найти глобальные экстремумы функции $f(x) = x^3 - 3x$ на $[-2; 2]$.

Производные равны $f'(x) = 3x^2 - 3$ и $f''(x) = 6x$. Стационарные точки: $x = -1$ и $x = 1$. В первой вторая производная отрицательна, поэтому это локальный максимум; во второй положительна, поэтому это локальный минимум.

Кандидат	Значение функции	Роль в задаче на отрезке
-2	-2	Левый конец, глобальный минимум
-1	2	Внутренний локальный и глобальный максимум
1	-2	Внутренний локальный и глобальный минимум
2	2	Правый конец, глобальный максимум

Таким образом, минимальное значение равно -2 и достигается в двух точках: -2 и 1. Максимальное значение равно 2 и достигается при -1 и 2. Если исследовать только стационарные точки, часть глобальных решений будет пропущена.

Пример 2. Для $f(x) = |x - 0{,}3|$ на $[-1; 2]$ производная равна -1 слева от 0,3 и 1 справа. Уравнение $f'(x) = 0$ решений не имеет, но минимум существует: $x^* = 0{,}3$, $f^* = 0$. Пример показывает необходимость включать точки недифференцируемости.

5 Подготовка к дихотомии

Будем искать минимум строго унимодальной функции на $[a_0; b_0]$. В данной лекции это означает, что имеется единственная точка минимума: до неё функция строго убывает, после неё строго возрастает. Допускается минимум на конце отрезка; тогда одна из ветвей отсутствует.

Строгая выпуклость непрерывной функции на отрезке является достаточным условием такой формы. Для гладкой функции её можно обосновать условием $f''(x) > 0$ на всём отрезке. Унимодальность также может быть доказана непосредственно по знаку первой производной. График помогает понять задачу, но несколько изображённых точек не доказывают отсутствие дополнительных впадин.

Пример 3, используемый далее. Рассмотрим

$$f(x) = x^2 + \frac{2}{x}, \qquad x \in [0{,}5; 3].$$

На этом отрезке функция непрерывна. Производные равны

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^2}, \qquad f''(x) = 2 + \frac{4}{x^3} > 0.$$

Отсюда $x^* = 1$, $f^* = 3$, минимум единственный. Классический ответ будет использоваться для проверки дихотомии. Сам алгоритм обращается только к значениям f, а не к формуле производной или заранее известной точке минимума.

6 Алгоритм дихотомии

6.1 Пробные точки и два параметра точности

На текущем отрезке $[a_k; b_k]$ вычисляется середина m_k, затем две пробные точки:

$$m_k = \frac{a_k + b_k}{2}, \qquad y_k = m_k - \delta, \qquad z_k = m_k + \delta.$$

Параметр $\delta > 0$ задаёт **отступ каждой точки от середины**. Расстояние между пробными точками равно 2δ. В некоторых учебниках малым параметром обозначают всё расстояние между точками, поэтому перед использованием готовой формулы необходимо проверить принятую запись [1, § 5.1.4].

Отдельно задаётся $\varepsilon_x > 0$ — требуемая абсолютная погрешность аргумента. Для рассматриваемого варианта удобно выбирать

$$0 < \delta < \varepsilon_x.$$

Например, $\delta = \varepsilon_x/4$. Пока длина текущего отрезка больше $2\varepsilon_x$, обе пробные точки лежат строго внутри него, поскольку $\delta < \varepsilon_x < (b_k - a_k)/2$.

6.2 Правило сокращения

Если $f(y_k) < f(z_k)$, минимум не может лежать правее z_k: иначе на убывающей ветви получилось бы противоположное неравенство. Поэтому сохраняем $[a_k; z_k]$.

Если $f(y_k) > f(z_k)$, аналогично сохраняем $[y_k; b_k]$. При **точном** равенстве значений строгая унимодальность позволяет сохранить $[y_k; z_k]$. Для единообразного вывода длины далее используется стандартная схема из учебника: равенство включается в первую ветвь, и сохраняется более широкий, но всё ещё допустимый отрезок $[a_k; z_k]$.

Сравнение в точной арифметике	Новая левая граница	Новая правая граница
$f(y_k) \le f(z_k)$	$a_{k+1} = a_k$	$b_{k+1} = z_k$
$f(y_k) > f(z_k)$	$a_{k+1} = y_k$	$b_{k+1} = b_k$

На каждом шаге сохраняется главное свойство: искомая точка x^* принадлежит новому отрезку. Это свойство называется инвариантом алгоритма. Если исходная функция не унимодальна, приведённое доказательство неприменимо.

6.3 Остановка и возвращаемый результат

В начале очередной итерации проверяют условие

$$\frac{b_k - a_k}{2} \le \varepsilon_x.$$

Если оно выполнено, возвращают середину отрезка и значение функции в ней:

$$\hat{x} = \frac{a_k + b_k}{2}, \qquad \hat{f} = f(\hat{x}).$$

Поскольку $x^* \in [a_k; b_k]$, в точной арифметике

$$|\hat{x} - x^*| \le \frac{b_k - a_k}{2} \le \varepsilon_x.$$

В отчёте полезно сохранять сам отрезок: он показывает, откуда взялась оценка ошибки. Значение $f(\hat{x})$ приближает минимальное значение, но допуск ε_x относится к аргументу; отдельная точность по функции требует дополнительной оценки.

7 Длина отрезка и число вычислений

Пусть $L_k = b_k - a_k$. В обеих ветвях стандартного сокращения длина равна

$$L_{k+1} = \frac{L_k}{2} + \delta.$$

Следовательно, это почти деление пополам, однако добавка δ сохраняется. Вычтем 2δ из обеих частей:

$$L_{k+1} - 2\delta = \frac{1}{2}(L_k - 2\delta).$$

Повторяя равенство, получаем точную формулу для фиксированного отступа:

$$L_k = 2\delta + \frac{L_0 - 2\delta}{2^k}.$$

Если процесс продолжать без остановки в точной арифметике, длина стремится к 2δ, а не к нулю. Именно поэтому нельзя задавать фиксированный отступ независимо от желаемой точности. Упрощённая оценка $L_0/2^k$ не учитывает ненулевую ширину пары пробных точек.

При $L_0 > 2\varepsilon_x$ и $0 < \delta < \varepsilon_x$ условие $L_k \le 2\varepsilon_x$ эквивалентно

$$2^k \ge \frac{L_0 - 2\delta}{2\varepsilon_x - 2\delta}.$$

Наименьшее достаточное число сокращений имеет вид

$$k_{\min} = \left\lceil \log_2 \frac{L_0 - 2\delta}{2\varepsilon_x - 2\delta} \right\rceil.$$

Если начальный отрезок уже имеет длину не больше $2\varepsilon_x$, сокращения не требуются. В стандартной реализации без сохранения повторных вычислений каждое сокращение использует два обращения к функции. Ещё одно обращение нужно, если программа возвращает её значение в окончательной середине:

$$N_f = 2k + 1.$$

Эта формула относится к нормальному завершению после k сокращений. Если программа дополнительно сравнила неразличимые машинные значения и остановилась, число попыток сравнения будет больше числа успешных сокращений. В коде эти показатели учитываются отдельно.

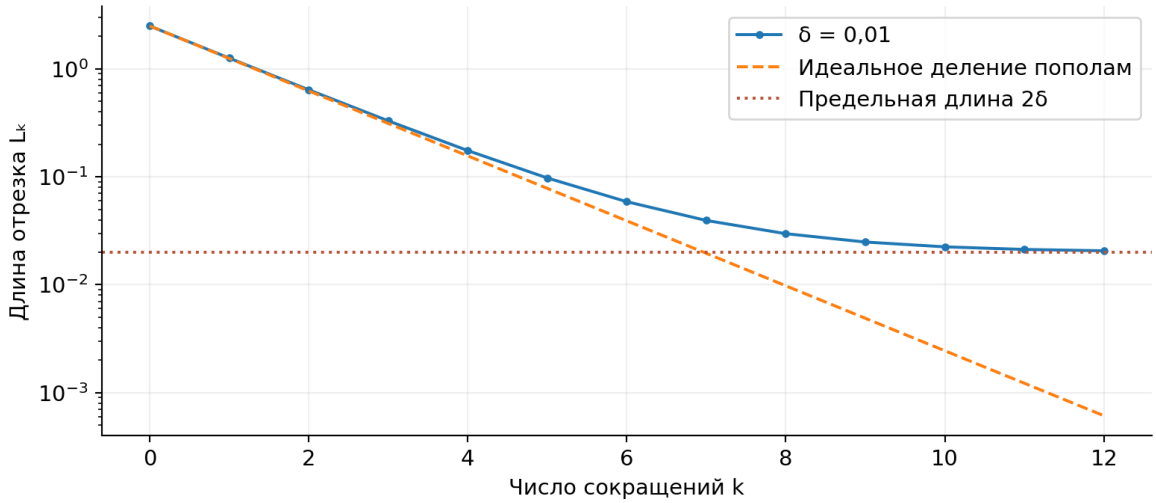


Рисунок 2 — Точная длина при $L_0 = 2{,}5$, $\delta = 0{,}01$ и отличие от идеального деления пополам. Пунктир показывает предельную длину 2δ.

Пример оценки. Для $L_0 = 2{,}5$, $\varepsilon_x = 0{,}05$, $\delta = 0{,}01$ отношение в логарифме равно $2{,}48/0{,}08 = 31$. Поэтому достаточно пяти сокращений. Ожидается десять значений для сравнений и одно итоговое вычисление, то есть $N_f = 11$.

8 Подробный расчёт методом дихотомии

Продолжим пример $f(x) = x^2 + 2/x$ на $[0{,}5; 3]$. Зададим $\varepsilon_x = 0{,}05$ и $\delta = 0{,}01$. Поскольку функция строго выпукла на всём отрезке, условия применения выполнены.

Первое сокращение. Середина равна 1,75, пробные точки — $y_0 = 1{,}74$ и $z_0 = 1{,}76$. Значения:

$$f(1{,}74) \approx 4{,}177025, \qquad f(1{,}76) \approx 4{,}233964.$$

Левое значение меньше, поэтому исключаем часть правее 1,76. Новый отрезок $[0{,}5; 1{,}76]$ имеет длину 1,26, что совпадает с $2{,}5/2 + 0{,}01$. Его половина больше 0,05, следовательно, поиск продолжается.

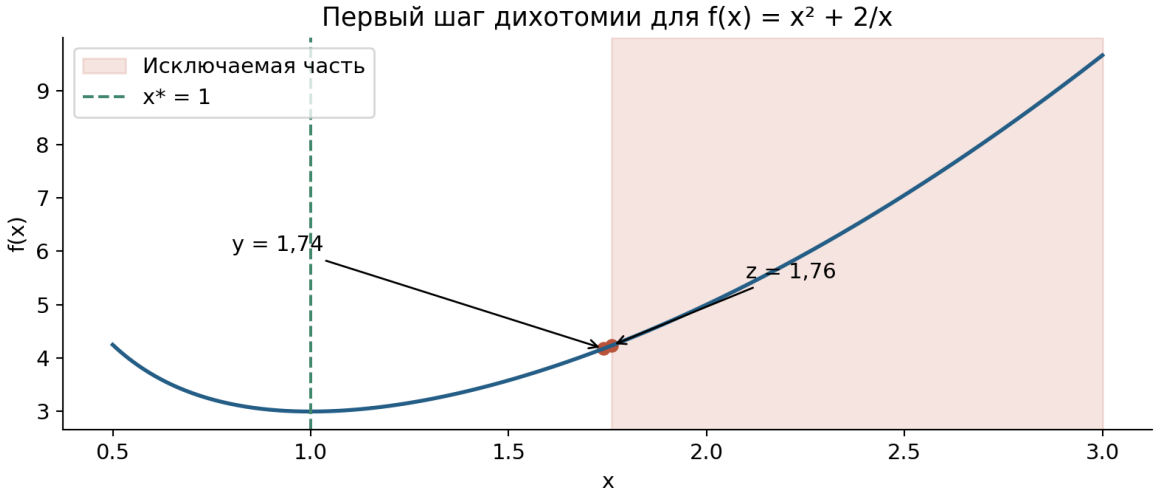


Рисунок 3 — Две пробы около середины исходного отрезка и исключаемая правая часть.

Второе сокращение. Теперь середина равна 1,13, пробы — 1,12 и 1,14. Значения 3,040114 и 3,053986 снова указывают на сохранение левой части. Получаем [0,5; 1,14].

Третье сокращение. Середина равна 0,82, пробы — 0,81 и 0,83. Здесь $3{,}125236 > 3{,}098539$, поэтому сохраняется правая часть [0,81; 1,14]. Дальнейшие вычисления представлены в таблице; числа округлены только при выводе.

Шаг	y	z	$f(y)$	$f(z)$	Новый отрезок
1	1,74	1,76	4,177025	4,233964	[0,5; 1,76]
2	1,12	1,14	3,040114	3,053986	[0,5; 1,14]
3	0,81	0,83	3,125236	3,098539	[0,81; 1,14]
4	0,965	0,985	3,003764	3,000682	[0,965; 1,14]
5	1,0425	1,0625	3,005271	3,011259	[0,965; 1,0625]

После пятого сокращения отрезок равен [0,965; 1,0625], длина — 0,0975. Поэтому

$$\hat{x} = 1{,}01375, \qquad f(\hat{x}) \approx 3{,}000562059,$$

$$|\hat{x} - x^*| \le 0{,}04875 < 0{,}05.$$

Точный ответ $x^* = 1$ позволяет независимо проверить результат: фактическая ошибка 0,01375 действительно меньше гарантированной оценки. Малый допуск не означает, что фактическая ошибка обязана совпадать с ним: оценка задаёт допустимую верхнюю границу.

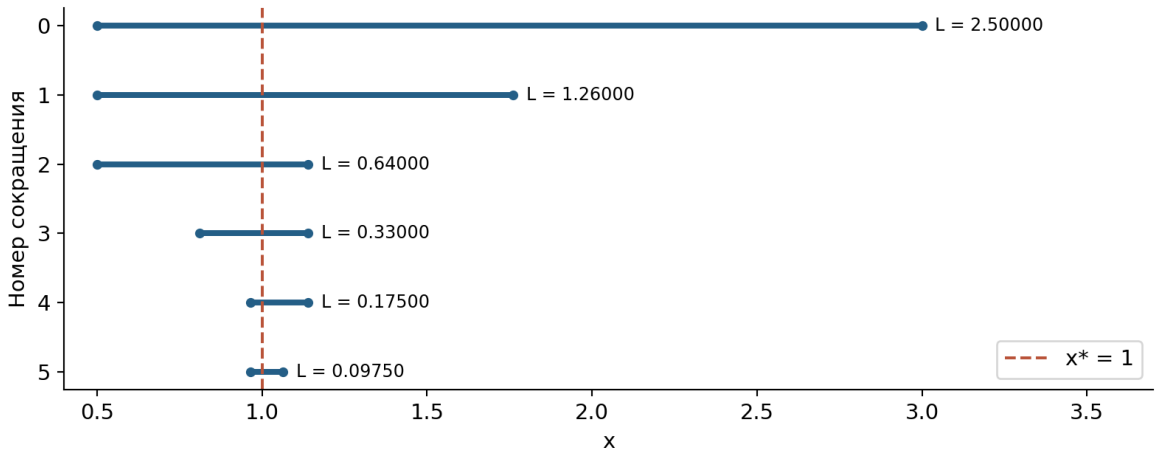


Рисунок 4 — Все отрезки содержат точку $x^* = 1$; в стандартной схеме их длины зависят от начальной длины и отступа, а положение зависит от сравнений функции.

9 Численная точность и особые ситуации

9.1 Почему отступ нельзя делать произвольно малым

Если δ слишком мало относительно масштаба аргумента, две разные математические точки могут получить одинаковое представление в памяти. Тогда сравнение перестаёт содержать полезную информацию. Перед вычислением функции программа проверяет строгий порядок $a < y < z < b$.

Также могут совпасть округлённые значения $f(y)$ и $f(z)$, хотя математически они различны. Для гладкой функции около середины разность примерно пропорциональна $2\delta f'(m)$. Возле минимума производная мала, поэтому значения особенно трудно различить.

В точной математике равенство значений позволяет сократить отрезок по правилам унимодальности. Однако **равенство двух чисел типа float не доказывает точное равенство значений функции**. В приложенной учебной программе при таком совпадении поиск останавливается со статусом indistinguishable_values, сохраняя предыдущий отрезок. Это сознательное отличие от теоретической ветви с точным равенством.

Такое завершение не считается достижением заявленной точности. Можно повысить точность арифметики, изменить масштаб функции или исследовать симметрию аналитически. Простое принудительное объявление результата точным в случае равенства может скрыть ошибку вычислений. Даже при неравных машинных значениях стандартный float не является интервальной арифметикой: теоретическая гарантия предполагает, что сравнения выполнены достоверно.

9.2 Минимум на границе и отсутствие унимодальности

Дихотомия допускает строго монотонную функцию: её минимум находится на одном из концов, а сохраняемые отрезки приближаются к этому концу. Например, для $f(x) = x$ на $[0; 1]$ пробное левое значение всегда меньше правого. Итоговая середина обычно не равна нулю, но оценка расстояния до граничного минимума остаётся верной.

У функции с несколькими впадинами сравнение пары значений не обосновывает глобальное исключение целой части области. В таком случае можно сначала выделить промежутки, на которых унимодальность доказана, решить отдельные задачи и сравнить найденные минимальные значения. Произвольное дробление без анализа не превращается в доказательство глобальности.

9.3 Дихотомия и поиск корня производной

Название «деление пополам» встречается и в методах решения уравнений. Для строго выпуклой дифференцируемой функции с внутренним минимумом можно искать корень $f'(x) = 0$ по знаку производной в середине. Это другой алгоритм: он использует производную и одну среднюю точку, а не пару значений исходной функции.

В методе дихотомии, изучаемом здесь, сравниваются $f(m - \delta)$ и $f(m + \delta)$. В методе бисекции корня сравниваются знаки функции уравнения, например $f'(m)$. Их предпосылки, формулы длины и счётчики вычислений следует указывать отдельно. В следующей лекции будет рассмотрен ещё один способ выбора пробных точек — золотое сечение.

10 Реализация на Python

10.1 Файлы и запуск

Архив к лекции содержит dichotomy.py с алгоритмом, run_examples.py с запуском примера и вариантов, variants.json с исходными данными и README.txt с инструкцией. Для вычислительной части достаточно Python 3.10 или новее; сторонние библиотеки не требуются. Иллюстрации уже включены в лекцию.

Общий пример запускается из папки с распакованными файлами:

```
python run_examples.py
```

Программа выводит приближение, значение функции, конечный отрезок, его половину длины, статус и число вычислений. Она также сохраняет history.csv и summary.json в подпапку результатов. Повторный запуск с теми же параметрами обновляет эти файлы.

Для общего примера ожидаются x = 1.01375, radius = 0.04875, iterations = 5, n_f = 11, status = converged. Небольшие различия последних знаков обусловлены представлением десятичных чисел в двоичной арифметике.

10.2 Основные операции

Ниже приведён фрагмент одной итерации. Здесь уже предполагается, что входные параметры проверены, а длина отрезка пока превышает требуемую:

```
mid = a + (b - a) / 2
left = mid - delta
right = mid + delta
f_left, f_right = f(left), f(right)

if f_left < f_right:
    b = right
elif f_left > f_right:
    a = left
else:
    # Совпадение float требует отдельного разбора.
    status = "indistinguishable_values"
```

В полной реализации после последней ветви цикл завершается. Проверка точности выполняется перед попыткой сокращения, а после завершения вычисляются середина и значение функции. Нельзя округлять границы внутри алгоритма до числа знаков, используемого в таблице: это изменяет будущие пробы и может нарушить оценку.

Функцию можно вызвать непосредственно:

```
from dichotomy import dichotomy
f = lambda x: x*x + 2/x
r = dichotomy(f, 0.5, 3.0, eps_x=0.05, delta=0.01)
print(r["status"], r["x"], r["radius"], r["n_f"])
```

Внутренний счётчик comparisons учитывает все попытки сравнить пару значений. Счётчик iterations учитывает только выполненные сокращения, а n_f — все обращения к целевой функции, включая итоговое значение. Поэтому общий учёт программы задаётся как $N_f = 2N_{\text{comparisons}} + 1$ для её обычных возвращаемых результатов.

Статус	Что означает результат
converged	Конечная половина длины не превышает eps_x.
max_iter	Достигнут предел сокращений; заданная точность не достигнута.
precision_limit	Не удалось получить две различные внутренние машинные точки.
indistinguishable_values	Значения в двух пробах совпали в используемой арифметике; отрезок оставлен прежним.

Если параметры нарушают условие $0 < \delta < \varepsilon_x$, границы некорректны или функция возвращает неконечное значение, программа выдаёт понятное исключение ValueError. Проверка исходной унимодальности остаётся математической частью работы студента: по конечному набору проб код не может доказать её для произвольной функции.

11 Задания для самостоятельной работы

11.1 Исследование функций классическим методом

Задание 1. Найдите все глобальные минимумы и максимумы $f(x) = x^4 - 2x^2$ на $[-2; 2]$. Выпишите полный набор кандидатов и сравните значения.

Задание 2. Исследуйте $f(x) = x^4$ и $g(x) = x^3$ в нуле двумя способами: по изменению знака первой производной и по первой ненулевой производной более высокого порядка.

Задание 3. Найдите минимум $f(x) = x + 1/x$ на $[0{,}25; 4]$. Обоснуйте единственность и сравните значение с обоими концами.

Задание 4. Приведите по одному примеру: минимума на границе с ненулевой производной; минимума в точке недифференцируемости; стационарной точки без экстремума.

11.2 Задания по алгоритму

Задание 5. Для $L_0 = 8$, $\varepsilon_x = 0{,}01$, $\delta = 0{,}002$ найдите достаточное число сокращений и число вычислений функции с учётом итоговой середины.

Задание 6. Объясните, почему при $\delta = 0{,}01$ стандартная схема с фиксированным отступом не позволяет гарантировать погрешность середины $0{,}005$, если исходный отрезок шире предельного. Что следует изменить?

Задание 7. Для $f(x) = (x - 1{,}3)^2$ на $[0; 4]$ выполните два сокращения при $\delta = 0{,}01$. Запишите отрезок, его середину, фактическую ошибку и верхнюю оценку ошибки после второго сокращения.

Задание 8. Запустите алгоритм для $f(x) = x^2$ на $[-1; 1]$. Объясните полученный статус совпадения значений и отдельно найдите точное решение аналитически. Почему аналитическое знание симметрии нельзя без проверки переносить на любую функцию, вернувшую два одинаковых float?

11.3 Восемнадцать индивидуальных вариантов

Для вариантов используются три семейства функций. В таблице заданы номер, семейство, сдвиг s, положительный параметр p и константа c.

Семейство A:

$$f(x) = (x - s)^2 + \frac{2p^3}{x - s} + c, \qquad x \in [s + p/2; s + 3p].$$

Семейство B:

$$f(x) = (x - s) - p\ln(x - s) + c, \qquad x \in [s + p/4; s + 4p].$$

Семейство C:

$$f(x) = e^{x-s} - p(x - s) + c, \qquad x \in [s - 2; s + 2].$$

Для семейств A и B область определения требует $x > s$, что обеспечивается указанными отрезками. Для C параметры таблицы выбраны так, чтобы внутренняя точка минимума принадлежала отрезку. Натуральный логарифм в Python вычисляется функцией math.log.

№	Семейство	s	p	c
1	A	-2	0,5	0
2	A	-1	0,8	1
3	A	0	1,2	-1
4	A	1	1,5	2
5	A	2	2	-2
6	A	3	2,5	3
7	B	-2	0,5	0
8	B	-1	0,8	1
9	B	0	1,2	-1
10	B	1	1,5	2
11	B	2	2	-2
12	B	3	2,5	3
13	C	-2	0,5	0
14	C	-1	0,8	1
15	C	0	1,2	-1
16	C	1	1,5	2
17	C	2	2	-2
18	C	3	2,5	3

Порядок выполнения варианта. Выпишите конкретную функцию и отрезок. Найдите первые две производные, докажите строгую выпуклость и определите точный минимум. Затем выполните первые два сокращения вручную и запустите программу при $\varepsilon_x = 10^{-3}$ и 10^{-4}, каждый раз задавая $\delta = \varepsilon_x/4$.

Сопоставьте фактическую ошибку, половину конечной длины и заданный допуск. Проверьте теоретическое число сокращений и счётчик обращений к функции. В отчёт включите обе строки результатов, первые ручные шаги и объяснение, почему константа c не меняет точку минимума в точной арифметике.

Пример команд для варианта 7:

```
python run_examples.py --variant 7 --eps 1e-3
python run_examples.py --variant 7 --eps 1e-4
```

Если отступ не указан, для индивидуальных вариантов программа автоматически использует четверть допуска. При необходимости его можно задать параметром --delta, сохраняя условие $0 < \delta < \varepsilon_x$.

12 Ответы для самопроверки

Задание 1: стационарные точки -1, 0, 1; также проверяются концы -2 и 2. Глобальный минимум -1 достигается при $x = \pm 1$, глобальный максимум 8 — при $x = \pm 2$. В нуле локальный максимум со значением ноль, который не является глобальным максимумом на заданном отрезке.

Задание 2: у x^4 первая ненулевая производная в нуле имеет порядок четыре и равна 24, следовательно, имеется строгий минимум. У x^3 порядок равен трём, поэтому экстремума нет.

Задание 3: $x^* = 1$, $f^* = 2$; на концах значение равно 4,25. Положительная вторая производная $2/x^3$ доказывает строгую выпуклость на положительной полуоси.

Задание 5: отношение $(8 - 0{,}004)/(0{,}02 - 0{,}004) = 499{,}75$, поэтому требуется девять сокращений и девятнадцать вычислений функции.

Задание 6: длина стремится к $2\delta = 0{,}02$, половина длины — к 0,01. Нужно уменьшить отступ так, чтобы он был меньше нового допуска 0,005; при слишком малом отступе необходимо учитывать предел точности арифметики.

Задание 7: после первого сокращения получается $[0; 2{,}01]$, после второго — $[0{,}995; 2{,}01]$. Середина равна 1,5025, фактическая ошибка 0,2025, верхняя оценка 0,5075.

Формулы для проверки вариантов. В семействе A стационарность эквивалентна $(x - s)^3 = p^3$, а в семействе B — $x - s = p$. В обоих случаях $x^* = s + p$. Значения минимума соответственно равны $3p^2 + c$ и $p - p\ln p + c$. В семействе C получаем $x^* = s + \ln p$, $f^* = p - p\ln p + c$. Во всех трёх семействах вторая производная положительна на используемой области.

13 Контрольные вопросы

1. Почему необходимое условие внутреннего экстремума не является достаточным?
2. Какие кандидаты нужно исследовать для глобального минимума на отрезке?
3. Что делать, если в стационарной точке вторая производная равна нулю?
4. Почему унимодальность важна для дихотомии?
5. Чем отступ δ отличается от допуска ε_x?
6. Почему в формуле новой длины появляется добавка δ?
7. Выведите явное выражение для L_k и формулу числа сокращений.
8. Как оценить погрешность середины конечного отрезка?
9. Почему счётчик вычислений функции может отличаться от удвоенного числа сокращений?
10. Чем дихотомия минимизации отличается от бисекции уравнения $f'(x) = 0$?
11. Какие проблемы возникают при чрезмерно малом отступе?
12. Почему два одинаковых машинных значения не всегда означают точное равенство функции?

14 Литература

[1] Пантелеев А. В., Летова Т. А. Методы оптимизации в примерах и задачах: учебное пособие. 4-е изд., испр. СПб.: Лань, 2015. 512 с. Необходимые и достаточные условия экстремума — § 2, с. 16–19; свойства одномерного поиска — § 5.1.1, с. 95–97; метод дихотомии — § 5.1.4, с. 103–105.

Для дальнейшего изучения: следующая лекция посвящена методам золотого сечения и Фибоначчи. Их способы выбора пробных точек позволяют иначе организовать повторное использование значений функции и учитывать вычислительный бюджет.