НАО «Восточно-Казахстанский технический университет имени Д. Серикбаева»

Дисциплина «Методы оптимизации»

ЛЕКЦИЯ 4

Симплексная таблица

Тема 4 по рабочей программе. Объём — 2 академических часа. Образовательная программа 6B06103 Математическое и компьютерное моделирование.

1 Цель и ожидаемые результаты

В предыдущей лекции симплекс-метод был описан через базисную матрицу, оценки переменных и допустимую длину шага. Симплексная таблица объединяет эти вычисления. Её правильный пересчёт сохраняет систему ограничений и позволяет последовательно переходить к более выгодному допустимому плану.

После занятия студент должен уметь составить таблицу для известного допустимого базиса, выбрать разрешающий элемент, выполнить полный пересчёт, восстановить решение и проверить его по исходной задаче. Отдельное внимание уделяется знаку оценок, пересчёту правой части и ситуациям, в которых таблица не даёт единственного оптимального плана.

Необходимы элементарные преобразования строк и материал лекций 2–3. Поиск начального допустимого базиса при отсутствии подходящих единичных столбцов относится к следующей теме. Табличная схема рассматривается в учебнике [1, § 11.1, с. 292–298]; здесь используется пример из лекции 3 и прежнее правило выбора переменных.

2 Что хранится в таблице

Рассмотрим каноническую задачу

$$\max f(x) = c^T x, \qquad Ax = b, \qquad x \geq 0.$$

Пусть выбран допустимый базис $I = (I_1, \dots, I_m)$, $B = A_I$. Введём преобразованные коэффициенты и правую часть:

$$\overline{A} = B^{-1}A, \qquad \overline{b} = B^{-1}b.$$

Система принимает вид $\overline{A}x = \overline{b}$. Базисные столбцы образуют единичную матрицу, а базисный план получается при нулевых небазисных переменных. Значения базисных переменных равны компонентам $\overline{b}$. Для допустимого плана все эти компоненты неотрицательны.

Обозначение $c_{B_i} = c_{I_i}$ означает коэффициент текущей базисной переменной в исходной целевой функции. В таблице указывают базис, коэффициенты c_B, правые части и все столбцы переменных. Даже вышедший из базиса столбец остаётся в таблице: эта переменная может войти в базис на последующем шаге.

Для любого столбца определим

$$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_{B_i}\,\overline{a}_{ij}, \qquad \Delta_j = c_j - z_j,$$

$$f_0 = \sum_{i=1}^{m} c_{B_i}\,\overline{b}_i.$$

Тогда на множестве решений системы ограничений

$$f(x) = f_0 + \sum_{j \notin I} \Delta_j\, x_j.$$

Здесь f_0 — значение функции в текущем базисном плане. Оценка Δ_j показывает изменение цели при увеличении соответствующей небазисной переменной с одновременным сохранением равенств. У базисных переменных оценки равны нулю.

Принятое оформление. В последних строках приведённых ниже таблиц записаны оценки Δ_j, а в столбце b — значение f_0. Эта последняя ячейка не является правой частью ещё одного ограничения. Такое соглашение нужно помнить при пересчёте строки оценок.

3 Выбор разрешающего элемента

Если текущий план допустим и все небазисные оценки $\Delta_j \le 0$, план оптимален для задачи максимизации. Действительно, неотрицательность x_j даёт $f(x) \le f_0$ для любого допустимого решения.

При наличии положительных оценок выбирается входящая переменная x_s. Чтобы согласовать вычисления с лекцией 3, выбираем наименьший индекс s среди небазисных переменных с $\Delta_s > 0$. В учебниках встречается и выбор наибольшей положительной оценки; оба правила требуют одинаковой проверки допустимого шага, но могут давать разные последовательности таблиц.

Ведущий столбец — столбец s. Для его положительных элементов вычисляют отношения

$$\theta_i = \frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{is}}, \qquad \overline{a}_{is} > 0.$$

Минимальное отношение задаёт шаг θ^*. Соответствующая строка r является разрешающей, а число $p = \overline{a}_{rs} > 0$ — разрешающим элементом. Из базиса выходит x_{I_r} и входит x_s. При равенстве минимальных отношений выбираем строку с наименьшим индексом выходящей переменной I_r. Это правило Бланда, использованное ранее.

Отношения с нулевым или отрицательным знаменателем исключаются. Нулевой числитель при положительном знаменателе допустим: он даёт вырожденный шаг нулевой длины. Если положительных элементов в ведущем столбце нет, целевая функция не ограничена сверху вдоль соответствующего допустимого луча.

4 Полный пересчёт таблицы

Преобразования выполняются над строками ограничений вместе с правой частью. Сначала разрешающую строку делят на p:

$$\overline{a}'_{rj} = \frac{\overline{a}_{rj}}{p}, \qquad \overline{b}'_{r} = \frac{\overline{b}_{r}}{p}.$$

Затем для каждой другой строки $i \neq r$ вычитают разрешающую строку, умноженную на прежний элемент ведущего столбца:

$$\overline{a}'_{ij} = \overline{a}_{ij} - \overline{a}_{is}\overline{a}'_{rj}, \qquad \overline{b}'_{i} = \overline{b}_{i} - \overline{a}_{is}\overline{b}'_{r}.$$

Иными словами, $R'_i = R_i - \overline{a}_{is}R'_r$. После преобразования ведущий столбец содержит единицу в строке r и нули в остальных строках. Это и позволяет включить x_s в новый базис. В строке r также заменяются имя базисной переменной и её коэффициент c_{B_r}.

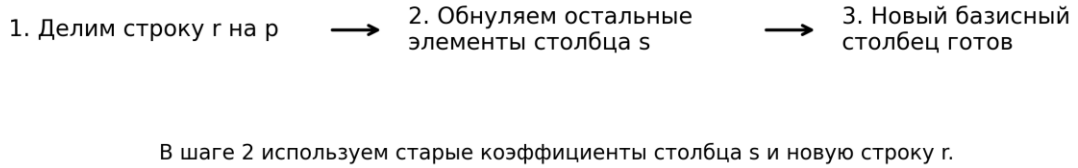


Рисунок 1 — Последовательность преобразований строк ограничений

Для отдельного элемента вне разрешающей строки формулу можно записать в виде

$$\overline{a}'_{ij} = \frac{p\overline{a}_{ij} - \overline{a}_{is}\overline{a}_{rj}}{p}.$$

Эту запись называют правилом прямоугольника. Все величины в её правой части относятся к старой таблице. Нельзя подставлять туда часть уже пересчитанных коэффициентов: это изменит смысл преобразования. Для правой части действует та же формула с заменой столбца j столбцом b.

4.1 Почему допустимость сохраняется

Если $\overline{a}_{is} > 0$, выбор минимального отношения означает $\overline{b}_i/\overline{a}_{is} \geq \theta^*$, поэтому $\overline{b}'_i = \overline{b}_i - \overline{a}_{is}\theta^* \geq 0$. При $\overline{a}_{is} = 0$ правая часть не меняется; при $\overline{a}_{is} < 0$ она увеличивается. В разрешающей строке новая правая часть равна $\theta^* \geq 0$.

Следовательно, при точной арифметике и правильном выборе строки отрицательная правая часть после шага появиться не может. Если она появилась в ручном расчёте, нужно проверить отношение, знак и арифметику пересчёта.

4.2 Как пересчитывать оценки и значение цели

Надёжный способ для первых учебных задач — заново вычислить z_j, Δ_j и f_0 по новому базису. Дополнительную проверку дают формулы

$$\Delta'_j = \Delta_j - \Delta_s \overline{a}'_{rj}, \qquad f'_0 = f_0 + \Delta_s \overline{b}'_r.$$

У оценок используется вычитание, у значения цели — сложение. Причина видна из подстановки выражения новой базисной переменной в $f = f_0 + \sum \Delta_j x_j$. Применять ко всей строке «оценки плюс значение цели» обычное вычитание, как к ограничению, нельзя.

Если вместо оценок хранить коэффициенты уравнения $f - \sum_j \Delta_j x_j = f_0$, знаки под переменными будут противоположными. Такая форма тоже корректна, но требует согласованного оформления. В этой лекции используется только $\Delta = c - z$.

5 Полный пример из предыдущей лекции

Решим таблично задачу

$$\max f = 3x_1 + 2x_2,$$

$$x_1 + x_2 \le 4, \qquad 2x_1 + x_2 \le 5, \qquad x_1, x_2 \ge 0.$$

Введём дополнительные переменные:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4, \qquad 2x_1 + x_2 + x_4 = 5.$$

Коэффициенты цели равны $c = (3,2,0,0)^T$. Начальный базис — (x_3, x_4), допустимый план — $(0,0,4,5)^T$.

5.1 Начальная таблица

Базис	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	0	4	1	1	1	0
x_4	0	5	2	1	0	1
Δ	—	0	3	2	0	0

Здесь $c_B = (0,0)^T$, поэтому $z_j = 0$, а оценки совпадают с коэффициентами цели. Входит x_1. Отношения в его столбце равны $4/1 = 4$ и $5/2$. Минимум достигается во второй строке: выходит x_4, разрешающий элемент $p = 2$.

Сначала делим вторую строку на 2. В порядке столбцов $(x_1, x_2, x_3, x_4 \mid b)$ получаем

$$R'_2 = (1,\ 1/2,\ 0,\ 1/2 \mid 5/2).$$

Из первой строки вычитаем новую вторую:

$$R'_1 = R_1 - R'_2 = (0,\ 1/2,\ 1,\ -1/2 \mid 3/2).$$

Отрицательный коэффициент $-1/2$ в столбце x_4 не нарушает допустимость. Для базисного плана важны неотрицательные правые части, а не знаки всех коэффициентов таблицы.

5.2 Таблица после первого шага

Базис	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
x_1	3	$\frac{5}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
Δ	—	$\frac{15}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$

Теперь $c_B = (0,3)^T$. Проверим две оценки:

$$\Delta_2 = 2 - (0 \cdot 1/2 + 3 \cdot 1/2) = 1/2,$$

$$\Delta_4 = 0 - (0 \cdot (-1/2) + 3 \cdot 1/2) = -3/2.$$

Значение цели $f_0 = 0 \cdot 3/2 + 3 \cdot 5/2 = 15/2$. Та же величина получается по исходному выражению цели при $x_1 = 5/2, x_2 = 0$.

Положительна только оценка x_2. Отношения: $(3/2)/(1/2) = 3$ и $(5/2)/(1/2) = 5$. Входит x_2, выходит x_3, разрешающая строка первая, $p = 1/2$.

Деление первой строки на $1/2$ означает умножение всех её элементов на 2:

$$R''_1 = (0,\ 1,\ 2,\ -1 \mid 3).$$

Затем из второй строки вычитается половина новой первой строки:

$$R''_2 = R'_2 - 1/2\, R''_1 = (1,\ 0,\ -1,\ 1 \mid 1).$$

5.3 Финальная таблица

Базис	c_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	2	3	0	1	2	-1
x_1	3	1	1	0	-1	1
Δ	—	9	0	0	-1	-1

Базис расположен по строкам как (x_2, x_1); следовательно, $x_2 = 3$ и $x_1 = 1$. Небазисные $x_3 = x_4 = 0$. Нельзя читать правые части сверху вниз как (x_1, x_2), не посмотрев на названия базисных переменных.

Пересчёт оценок подтверждает

$$\Delta_3 = 0 - (2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1)) = -1,$$

$$\Delta_4 = 0 - (2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1) = -1.$$

Все оценки неположительны, поэтому $x^* = (1,3,0,0)^T$, $f^* = 9$. Приращение цели на втором шаге равно $(1/2) \cdot 3 = 3/2$, и $15/2 + 3/2 = 9$.

Итоговое выражение $f = 9 - x_3 - x_4$ даёт независимую верхнюю оценку $f \le 9$. Для равенства необходимы $x_3 = x_4 = 0$, после чего ограничения однозначно определяют $x_1 = 1, x_2 = 3$. В этом примере оптимальный план единственен.

6 Что проверить перед принятием ответа

Проверка таблицы не заменяет проверку исходной задачи. Восстановите полный вектор переменных и подставьте его в исходные ограничения. Для основного примера: $1 + 3 = 4$, $2 \cdot 1 + 3 = 5$, обе координаты неотрицательны, $3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 9$.

После каждого шага полезно проверить следующие условия:

1. Каждый базисный столбец единичный и соответствует своей строке.
2. Все правые части неотрицательны.
3. Оценки базисных переменных равны нулю.
4. Значение цели совпадает с $c^T x$ для восстановленного плана.
5. Приращение цели равно $\Delta_s \theta^*$ и неотрицательно.

В компьютерных расчётах с плавающей точкой сравнения требуют согласованных допусков. Например, очень маленькое отрицательное число может быть следствием округления. В приложенной программе используются точные дроби, что позволяет проверять равенства без допуска и видеть исходные рациональные значения.

7 Особые ситуации и типичные ошибки

Наблюдение	Смысл	Действие
Небазисные оценки неположительны	Допустимый план оптимален	Проверить исходную задачу
Положительная оценка; её столбец неположителен	Цель не ограничена сверху	Построить допустимый луч
Минимальное отношение равно нулю	Вырожденный шаг	Сменить базис по принятому правилу
Отрицательная правая часть после пересчёта	Нарушена допустимость	Проверить выбор строки и вычисления

Нулевая небазисная оценка. Она указывает на отсутствие изменения цели при движении по соответствующему направлению. Если допустим положительный шаг, получаем другой оптимальный план. Сама по себе нулевая оценка ещё не доказывает существование другой оптимальной точки. Например, при $x_1 + x_2 = 0$, $x_1, x_2 \geq 0$, $f = 0$ обе оценки нулевые, но допустима только точка $(0,0)$.

Вырожденность. При нулевом шаге цель не увеличивается, хотя базис меняется. Ошибочно завершать алгоритм только потому, что два соседних значения цели совпали. Остановка определяется оценками или иным предусмотренным исходом алгоритма.

Отрицательные коэффициенты. Они допустимы в строках ограничений. При выборе разрешающей строки исключают неположительные элементы только выбранного ведущего столбца. Нельзя заменять их модулями.

Правые части и коэффициенты цели. При нормировке строки делится и её правая часть. После смены базиса нужно обновить c_B, иначе дальнейшие оценки будут вычисляться для неправильного набора переменных.

8 Проверка на Python

Файл simplex_tableau.py в архиве реализует таблицу, выбор по правилу Бланда и точный пересчёт. Последний столбец каждой строки содержит правую часть. Ключевая функция имеет следующий вид:

```
def pivot(table, row, col):
    """Полный шаг Гаусса — Жордана; последний столбец — правая часть."""
    p = table[row][col]
    if p <= 0:
        raise ValueError("Разрешающий элемент должен быть положительным")
    lead = [v / p for v in table[row]]
    result = []
    for i, old in enumerate(table):
        if i == row:
            result.append(lead[:])
        else:
            factor = old[col]
            result.append([v - factor * w for v, w in zip(old, lead)])
    return result
```

Здесь lead — уже нормированная разрешающая строка, а factor берётся из старой таблицы. Исходная таблица не изменяется во время построения новой. Это предотвращает смешивание старых и новых коэффициентов.

Полный пример запускается командой python simplex_tableau.py. Он печатает три таблицы, базисы, оценки, планы и значения цели. Должна получиться последовательность $0, 15/2, 9$. В Python базис [2, 3] означает математические переменные (x_3, x_4), поскольку индексация начинается с нуля.

Программа требует единичных начальных базисных столбцов и неотрицательной правой части. Она не выполняет фазу поиска допустимого базиса. Для дробных данных используйте строки вида '1/3' или Fraction: ввод через float уже содержит двоичное приближение.

9 Самостоятельная работа

1. Повторите первый пересчёт основного примера и отдельно проверьте все четыре оценки по формуле $c_j - z_j$.
2. Решите таблицами задачу $\max(2x_1 + x_2)$ при $x_1 + x_2 \le 4$, $x_1 \le 2$, $x_1, x_2 \ge 0$. Начните с дополнительных переменных. Запишите базис после каждого шага.
3. Для $\max(x_1 + x_2)$ при $x_1 + x_2 \le 4, x \ge 0$ найдите одну оптимальную таблицу и выполните допустимый переход с нулевой оценкой. Опишите всё множество оптимумов.
4. Для $\max(x_1 + x_2)$ при $x_1 - x_2 \le 1, x \ge 0$ установите неограниченность. Укажите точку начала и направление допустимого луча.
5. Для $\max(x_1 + x_2)$ при $x_1 \le 0, x_2 \le 1, x \ge 0$ выполните вырожденный шаг. Объясните, почему нулевая длина шага не означает завершения расчёта.
6. Найдите ошибку в утверждении: «При пересчёте строки оценок значение цели надо уменьшить на $\Delta_s \theta^*$». Исправьте его для принятого в лекции оформления.

Ориентиры для проверки. В задании 2 оптимум (2,2), значение 6; базисы (x_3, x_4), (x_3, x_1), (x_2, x_1). В задании 3 оптимален весь отрезок $(4 - t, t), 0 \le t \le 4$. В задании 4 подходит луч $(1 + t, t), t \ge 0$. В задании 5 первый шаг по x_1 нулевой, а конечный план (0,1) имеет значение 1.

10 Контрольные вопросы

1. Какие данные ограничений и целевой функции объединяет симплексная таблица?
2. Почему базисные столбцы должны образовывать единичную матрицу?
3. Как восстановить план, если порядок переменных в базисе изменился?
4. Почему оценки базисных переменных равны нулю?
5. Какие отношения участвуют в выборе разрешающей строки?
6. Почему пересчёт сохраняет допустимость?
7. В чём различие между старой и нормированной разрешающей строкой?
8. Почему значение цели и оценки пересчитываются с разными знаками?
9. Как таблица показывает неограниченность цели?
10. Достаточно ли нулевой небазисной оценки для вывода о нескольких оптимальных точках?
11. Какие проверки можно выполнить независимо от таблицы?
12. Какая дополнительная процедура нужна при отсутствии начального допустимого базиса?

Литература

1. Пантелеев А. В., Летова Т. А. Методы оптимизации в примерах и задачах. 4-е изд., испр. СПб.: Лань, 2015. 512 с. § 11.1, с. 292–298 — построение и пересчёт таблицы.
2. Материалы курса «Методы оптимизации». Лекция 3 — базис, оценки, допустимый шаг и правило выбора переменных.

Порядок столбцов, числовой пример и программа согласованы с предыдущей лекцией. Последовательность выбора переменных в других пособиях может отличаться; при корректных преобразованиях это не меняет оптимального значения задачи.