НАО «Восточно-Казахстанский технический университет имени Д. Серикбаева»

Дисциплина «Методы оптимизации»

ЛЕКЦИЯ 2

Сведение задачи линейного программирования к каноническому виду

Эквивалентные преобразования, матричная запись и подготовка к симплекс-методу

Тема 2 по рабочей программе. Объём — 2 академических часа. В первой лекции мы строили линейную модель и находили решение по геометрии допустимой области. Теперь научимся записывать любую такую модель в единой форме, удобной для алгоритмов. Главное требование: после преобразования должны восстанавливаться исходные допустимые планы и значения целевой функции.

1 Цель лекции и ожидаемые результаты

После изучения темы студент должен уметь заменять неравенства равенствами, обрабатывать свободные и ограниченные по знаку переменные, составлять матрицу преобразованной задачи и проверять обратное восстановление решения. Особое внимание уделяется разнице между канонической формой и наличием начального допустимого базиса.

Предварительно нужны операции с матрицами, решение систем линейных уравнений, свойства неравенств и понятие допустимого решения. План занятия: соглашение о формах ЛП; преобразования целевой функции и переменных; преобразования ограничений; два развёрнутых примера; проверка результата и переход к следующей лекции.

2 Что называется канонической формой

В этой лекции сохраняется соглашение из лекции 1: стандартная задача максимизации содержит неравенства «не больше», а каноническая — равенства. В других учебниках названия могут отличаться, поэтому ориентироваться следует на математическую запись.

$$\text{Стандартная форма:} \qquad c^{\mathsf{T}}x \to \max, \quad Ax \le b, \quad x \ge 0.$$

$$\text{Каноническая форма:} \qquad \tilde{c}^{\mathsf{T}}y \to \max, \quad \tilde{A}y = \tilde{b}, \quad y \ge 0.$$

Если в исходной задаче n переменных и m условий, то после преобразований число переменных обычно возрастает. Поэтому для новой задачи используется обозначение y, а не молчаливое сохранение старого вектора x.

Каноническая запись сама по себе не требует неотрицательных правых частей. Условие $\tilde{b} \ge 0$ удобно для построения начального базиса и при необходимости обеспечивается умножением строк на -1. При этом существование допустимого базиса ещё не доказано.

2.1 Что означает эквивалентность задач

Эквивалентность не означает, что старый и новый векторы имеют одинаковую размерность. Требуется установить две связи:

1. Любой допустимый исходный план можно дополнить или преобразовать в допустимый новый план.
2. Из любого допустимого нового плана по указанным формулам восстанавливается допустимый исходный план.

Значения критериев должны быть связаны известной формулой. Если мы заменили минимум f максимумом $-f$, знак оптимального значения изменится. Если отбросили постоянное слагаемое, его нужно вернуть при записи ответа.

3 Преобразование целевой функции

Для любых двух допустимых точек x и z справедливо:

$$f(x) \le f(z) \quad \Leftrightarrow \quad -f(x) \ge -f(z).$$

Следовательно, множества оптимальных планов задач минимизации f и максимизации $-f$ совпадают, но значения критериев противоположны:

$$\min_{x \in D} f(x) = -\max_{x \in D} [-f(x)].$$

Постоянное слагаемое не влияет на выбор оптимального плана. Например, минимизация $4x_1 - 2x_2 + 7$ эквивалентна максимизации $z = -4x_1 + 2x_2$. После решения исходное значение равно $f^* = 7 - z^*$. Нельзя просто объявить z^* ответом исходной задачи.

4 Как обеспечить неотрицательность переменных

4.1 Неположительная переменная

Если $x_j \le 0$, вводим $y_j = -x_j \ge 0$. Во всех строках ограничений и в целевой функции столбец коэффициентов этой переменной меняет знак.

$$x_j = -y_j, \quad y_j \ge 0; \qquad a_{ij} x_j = -a_{ij} y_j.$$

Пример: выражение $2x_1 + 3x_2$ при условии $x_2 \le 0$ становится $2x_1 - 3y_2$. Знак нельзя менять только в целевой функции или только в одной строке.

4.2 Свободная переменная

Если переменная может принимать любые действительные значения, представим её как разность двух неотрицательных переменных:

$$x_j = u_j - v_j, \qquad u_j \ge 0, \quad v_j \ge 0.$$

Для любого заданного x_j подходит пара $u_j = \max(x_j, 0)$, $v_j = \max(-x_j, 0)$. Обратно, любая неотрицательная пара задаёт действительное число $x_j = u_j - v_j$.

Такое представление не единственно: пары (u_j, v_j) и $(u_j + t, v_j + t)$ при $t \ge 0$ задают одно и то же исходное число. Поэтому эквивалентность здесь выражается через восстановление исходного плана, а не через взаимно однозначное соответствие всех расширенных векторов. Добавлять условие $u_j v_j = 0$ не нужно: оно нелинейное и изменяет класс задачи.

4.3 Нижняя граница и сдвиг

Условие $x_j \geq l_j$ заменяется подстановкой:

$$x_j = l_j + y_j, \qquad y_j \geq 0.$$

После сдвига меняются и правые части ограничений, и постоянная часть критерия. Например,

$$2x_1 + x_2 \leq 8, \quad x_1 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad 2y_1 + x_2 \leq 6, \quad y_1 \geq 0.$$

Если забыть вычесть 2 из правой части, новая модель будет описывать другой объём ресурса.

4.4 Верхняя граница и двустороннее ограничение

Если задана только верхняя граница $x_j \leq u_j$, можно положить $x_j = u_j - y_j$, $y_j \geq 0$. Если известны обе границы $l_j \leq x_j \leq u_j$, удобнее использовать сдвиг $x_j = l_j + y_j$ и добавить ограничение $y_j \leq u_j - l_j$.

$$-2 \leq x \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 + y, \qquad y + s = 5, \quad y, s \geq 0.$$

При $l_j = u_j$ переменная фиксирована: её можно подставить и исключить. При $l_j > u_j$ исходные ограничения несовместны; введение новых переменных не устраняет это противоречие.

5 Как заменить неравенства равенствами

5.1 Ограничение не больше

Для условия $a^{\mathsf{T}}x \leq b$ вводится неотрицательный остаток ресурса $s = b - a^{\mathsf{T}}x$:

$$a^{\mathsf{T}}x + s = b, \qquad s \geq 0.$$

Доказательство. Если исходное неравенство выполнено, то указанное значение s неотрицательно и равенство верно. Если равенство верно при $s \geq 0$, то $a^{\mathsf{T}}x = b - s \leq b$. Тем самым доказаны оба направления.

Добавочная переменная показывает неиспользованный ресурс. Она имеет нулевой коэффициент в целевой функции, если модель прямо не задаёт отдельной платы за остаток.

5.2 Ограничение не меньше

Для условия $a^{\mathsf{T}}x \geq b$ вводится неотрицательная переменная избытка $s = a^{\mathsf{T}}x - b$:

$$a^{\mathsf{T}}x - s = b, \qquad s \geq 0.$$

Знак перед переменной избытка отрицательный. Равенство $a^{\mathsf{T}}x + s = b$ при $s \geq 0$ описывало бы противоположное неравенство. Например, $2x_1 + x_2 \geq 5$ превращается в $2x_1 + x_2 - s = 5$.

5.3 Равенство и отрицательная правая часть

Исходное равенство уже имеет нужный тип. Новую добавочную переменную к нему не вводят, иначе изменится множество допустимых планов.

При умножении неравенства на отрицательное число его направление меняется:

$$-x_1 + 2x_2 \leq -3 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - 2x_2 \geq 3 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - 2x_2 - s = 3.$$

Если сначала добавить остаток, получится $-x_1 + 2x_2 + s = -3$. Умножение всего равенства на -1 даёт ту же каноническую строку. Следовательно, возможны разные последовательности корректных действий.

5.4 Сводная таблица преобразований

Исходное условие	Замена	Дополнительное условие
$a^\top x \le b$	$a^\top x + s = b$	$s \ge 0$
$a^\top x \ge b$	$a^\top x - s = b$	$s \ge 0$
$x_j \le 0$	$x_j = -y_j$	$y_j \ge 0$
x_j свободна	$x_j = u_j - v_j$	$u_j, v_j \ge 0$
$x_j \ge l_j$	$x_j = l_j + y_j$	$y_j \ge 0$
$l_j \le x_j \le u_j$	$x_j = l_j + y_j$	$y_j + s_j = u_j - l_j$

В последней строке обе новые переменные неотрицательны. Для каждой строки-неравенства вводится своя добавочная переменная; один и тот же символ нельзя использовать для разных остатков.

6 Общий алгоритм приведения

1. Записать тип оптимизации, условия на каждую переменную и направление каждого ограничения.
2. Выбрать подстановки, выражающие исходные переменные через неотрицательные новые.
3. Подставить их во все ограничения и в целевую функцию; собрать постоянные слагаемые.
4. При необходимости нормировать знаки правых частей, меняя направление неравенства при умножении на -1.
5. Добавить остатки к условиям «не больше» и вычесть избытки из условий «не меньше».
6. Зафиксировать порядок новых переменных; составить матрицу, правую часть и вектор критерия.
7. Выписать формулы восстановления исходных переменных и исходного значения цели.
8. Проверить хотя бы один допустимый план прямой подстановкой в обе записи.

Сама канонизация не является методом поиска оптимума. Она готовит задачу для симплекс-метода, который будет изучаться в следующей лекции.

7 Пример с остатками ресурсов

Вернёмся к модели из лекции 1:

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max, \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ 2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Введём остатки $s_1 = 4 - x_1 - x_2$ и $s_2 = 5 - 2x_1 - x_2$. Получим:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + s_1 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + s_2 = 5, \end{cases} \qquad x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0.$$

Для вектора $y = (x_1, x_2, s_1, s_2)^{\mathrm{T}}$ матричная запись имеет вид:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \tilde{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

План $(x_1, x_2) = (0,0)$ дополняется до $(0,0,4,5)$. Оптимальный план из первой лекции $(1,3)$ дополняется до $(1,3,0,0)$, и значение $F = 9$ сохраняется. При $x_1 = 1, x_2 = 1$ остатки равны 2 и 2: этот план допустим, но не оптимален.

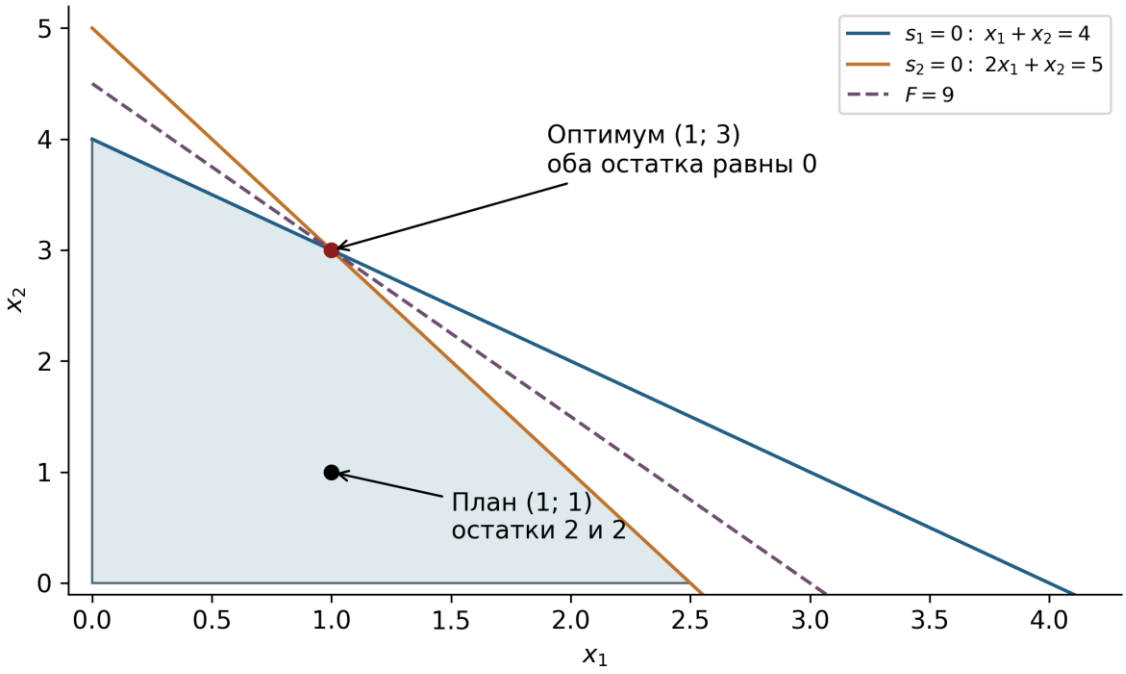


Рисунок 1 — Остатки ресурсов обращаются в ноль на соответствующих граничных прямых

На рисунке точки внутренней области имеют положительные остатки. На первой границе нулевым становится s_1, на второй — s_2. Добавочные переменные сохраняют эту информацию в алгебраической форме.

8 Развёрнутый пример со смешанными условиями

8.1 Исходная задача

Рассмотрим минимизацию:

$$f = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5 \to \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq -2, \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 \geq 1, \quad x_2 \in \mathbb{R}, \quad x_3 \leq 0. \end{cases}$$

Здесь встречаются отрицательная правая часть, оба направления неравенств, равенство, сдвиг нижней границы, свободная и неположительная переменные.

8.2 Замена переменных

Положим $x_1 = 1 + u$, $x_2 = v - w$, $x_3 = -t$, где $u, v, w, t \geq 0$. Подстановка даёт:

$$\begin{cases} -u + 2v - 2w + t \leq -1, \\ u + v - w - t \geq 0, \\ 2u - v + w - t = 2. \end{cases}$$

Например, во второй строке из правой части вычитается постоянная единица: исходное требование $1 + u + v - w - t \geq 1$ превращается в $u + v - w - t \geq 0$.

8.3 Равенства и критерий

Первую строку умножим на -1. В обеих строках-неравенствах теперь используется знак «не меньше», поэтому вычитаем переменные избытка:

$$\begin{cases} u - 2v + 2w - t - s_1 = 1, \\ u + v - w - t - s_2 = 0, \\ 2u - v + w - t = 2, \end{cases} \qquad u, v, w, t, s_1, s_2 \geq 0.$$

Исходная целевая функция после подстановки равна:

$$f = 7 + 2u - v + w - 3t.$$

В качестве нового критерия выбираем $z = -2u + v - w + 3t \to \max$. Связь значений: $f = 7 - z$.

8.4 Матричная запись и обратное восстановление

Зафиксируем порядок $y = (u, v, w, t, s_1, s_2)^{\mathsf{T}}$. Тогда:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{c} = (-2,1,-1,3,0,0)^{\mathsf{T}}; \qquad x_1 = 1 + u, \quad x_2 = v - w, \quad x_3 = -t, \quad f = 7 - z.$$

Неотрицательность y относится ко всем шести координатам. Если забыть ограничения на s_1 или s_2, равенства перестанут быть эквивалентными исходным неравенствам.

8.5 Проверка конкретного плана

Проверим расширенный план:

$$y = \left(\frac{4}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1, 0, 0\right)^{\mathsf{T}}.$$

Левые части трёх равенств соответственно равны 1, 0 и 2. Восстановим исходный план:

$$x = \left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, -1\right)^{\mathsf{T}}.$$

Для него первое неравенство обращается в $-2 \leq -2$, второе — в $1 \geq 1$, а равенство — в $4 = 4$. Целевая функция равна $f = 7$, новый критерий $z = 0$, что подтверждает связь $f = 7 - z$.

8.6 Как дополнительно доказать оптимальность этого плана

Из третьего ограничения выражаем $x_2 = 2x_1 + x_3 - 4$. Первые два ограничения принимают вид:

$$3x_1 + x_3 \le 6, \qquad 3x_1 + 2x_3 \ge 5.$$

Отсюда $5 \le 3x_1 + 2x_3 \le 6 + x_3$, значит $x_3 \ge -1$. После исключения x_2 критерий равен $f = 9 + 2x_3 \ge 7$. Проверенный план достигает этой границы, поэтому оптимален. Этот короткий довод подтверждает ответ независимо от компьютерного решателя.

9 Единая формула преобразования

Для углублённого понимания запишем все линейные замены в виде $x = d + Ty$, где $y \ge 0$. Вектор d содержит сдвиги нижних или верхних границ, а столбцы T — коэффициенты новых переменных.

$$Ax \le b \quad \Rightarrow \quad ATy \le b - Ad.$$

$$f(x) = c^{\mathsf{T}}x + c_0 = c^{\mathsf{T}}d + c_0 + (T^{\mathsf{T}}c)^{\mathsf{T}}y.$$

Таким образом, новая матрица до добавления остатков равна AT, правая часть — $b - Ad$, вектор критерия — $T^{\mathsf{T}}c$, постоянная часть — $c^{\mathsf{T}}d + c_0$. Эта запись объясняет, почему при сдвиге переменной необходимо обновлять не только её столбец.

Подстановка неотрицательной пары вместо свободной переменной создаёт два противоположных столбца. При этом линейность задачи сохраняется.

10 Каноническая форма и начальный базис

В системе $Ay = b$ с m линейно независимыми строками базисом называют набор m линейно независимых столбцов. Соответствующую квадратную матрицу обозначают B. Если остальные переменные положить равными нулю, базисные координаты определяются из $By_B = b$.

$y_B = B^{-1}b$ в теоретической записи; при вычислениях решают систему $By_B = b$.

Полученный базисный план допустим только при $y_B \ge 0$. В примере с двумя ресурсами добавочные столбцы образуют единичную матрицу, поэтому начальный план (0,0,4,5) сразу допустим.

Для условия $x_1 + x_2 \ge 3$ каноническое равенство $x_1 + x_2 - s = 3$ не даёт допустимого плана при $x_1 = x_2 = 0$: получилось бы $s = -3$. Однако задача не является несовместной — например, $(x_1, x_2, s) = (3,0,0)$ допустим. Следовательно, неудачный выбор базиса не доказывает отсутствия решений.

Искусственные переменные служат для специального поиска начального допустимого базиса. Они не являются остатками ресурсов. Подробный алгоритм относится к теме 5 силлабуса; в данной лекции достаточно понимать причину его появления.

11 Проверка вычислений на Python

Пример использует точные рациональные числа из стандартной библиотеки. Программа проверяет конкретный план и преобразование критерия; доказательство оптимальности уже дано в разделе 8.6.

```
"""Точная проверка смешанного примера из лекции 2."""
```

```
from fractions import Fraction as Q

A = [[1, -2, 2, -1, -1, 0],
     [1,  1, -1, -1, 0, -1],
     [2, -1, 1, -1, 0, 0]]
b = [1, 0, 2]
c = [-2, 1, -1, 3, 0, 0]
y = [Q(4, 3), Q(0), Q(1, 3), Q(1), Q(0), Q(0)]

residual = [sum(a*v for a, v in zip(row, y)) - rhs
            for row, rhs in zip(A, b)]
assert all(v >= 0 for v in y)
assert residual == [0, 0, 0]

u, v, w, t, s1, s2 = y
x1, x2, x3 = 1+u, v-w, -t
z = sum(a*v for a, v in zip(c, y))
f = 2*x1 - x2 + 3*x3 + 5
assert x1 >= 1 and x3 <= 0
assert -x1 + 2*x2 - x3 <= -2
assert x1 + x2 + x3 >= 1
assert 2*x1 - x2 + x3 == 4
assert f == 7-z
print("Остатки:", residual)
print("x =", tuple(map(str, (x1, x2, x3))))
print("f =", f, "; z =", z)
```

Ожидаемый результат: остатки трёх канонических равенств равны нулю; восстановленный план равен $(7/3, -1/3, -1)$; значения критериев $f = 7$ и $z = 0$.

12 Типичные ошибки

Ошибка	Почему она меняет задачу	Как проверить
К условию «не меньше» прибавлен остаток	Получается противоположное неравенство	Выразить добавочную переменную
После умножения на -1 сохранён знак неравенства	Меняется допустимая полуплоскость	Проверить известную допустимую точку
Свободная переменная объявлена неотрицательной	Часть исходных планов теряется	Выписать условия на все переменные
После сдвига не изменена правая часть	Меняется исходный ресурс или норма	Подставить сдвиг в исходную строку
Забыто постоянное слагаемое критерия	План может быть верным, значение — нет	Восстановить исходную функцию
Добавочная переменная объявлена искусственной	Смешиваются разные роли переменных	Разделить канонизацию и поиск базиса

13 Вопросы для самоконтроля

1. Какую форму в нашем курсе называют канонической?
2. Почему максимум $-f$ соответствует минимуму f?
3. Как доказать эквивалентность добавления остатка к неравенству?

4. Почему переменная избытка входит со знаком минус?
5. Как обработать свободную и неположительную переменные?
6. Почему представление свободной переменной не единственно?
7. Как меняются правые части при замене $x = d + Ty$?
8. Обязательно ли каноническая форма имеет неотрицательную правую часть?
9. Чем допустимый базисный план отличается от произвольного базисного плана?
10. Почему искусственные переменные нельзя автоматически считать остатками ресурсов?

14 Задания для закрепления

Задание 1. Приведите к каноническому виду максимум $2x_1 + x_2$ при $x_1 + 3x_2 \le 6$, $2x_1 + x_2 \le 5$, $x_1, x_2 \ge 0$. Составьте матрицу в порядке (x_1, x_2, s_1, s_2) и найдите начальный план по добавочным переменным.

Задание 2. Преобразуйте минимум $x_1 - 2x_2 + 3$ при $x_1 - x_2 \ge 2$, $x_1 \ge 1$, $x_2 \le 0$. Выпишите формулу восстановления исходного значения цели.

Задание 3. Преобразуйте $-x_1 + x_2 \le -4$, где $x_1 \ge 0$, а x_2 свободна. Покажите, что два разных неотрицательных расширенных плана могут задавать одну и ту же исходную точку.

Задание 4. Запишите каноническую модель для минимума $3x + 1$ на отрезке $[-2,3]$. Найдите оптимум исходной задачи и проверьте его восстановление.

Задание 5. Объясните ошибку: «Если правые части неотрицательны, то выбор любых m независимых столбцов даёт допустимый базис».

Краткие ориентиры для самопроверки. В задании 1 начальный план равен $(0,0,6,5)$. В задании 2 подстановки $x_1 = 1 + u$, $x_2 = -v$ дают $u + v - s = 1$ и исходную цель $4 + u + 2v$. В задании 4 используются $x = -2 + y$, $y + s = 5$; минимум равен -5 при $y = 0$. Полное решение должно содержать обоснование, а не только эти конечные записи.

15 Основные выводы

Канонизация сохраняет исходную оптимизационную задачу через явные формулы преобразования и восстановления. Неравенства становятся равенствами за счёт неотрицательных остатков или избытков, а ограничения на знаки переменных устраняются линейными заменами. Каноническая форма готовит систему к симплекс-методу, но сама по себе не гарантирует готового допустимого базиса.

Литература для самостоятельного изучения

1. Кудашов В. Н., Селина Е. Г. Основы линейного программирования. — СПб.: Университет ИТМО, 2020. — 42 с. Включено в основную литературу силлабуса.
2. Черняк А. А., Черняк Ж. А., Метельский Ю. М., Богданович С. А. Методы оптимизации: теория и алгоритмы. — 2-е изд. — М.: Юрайт, 2023. — 357 с. Включено в основную литературу силлабуса.
3. Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. — Cambridge University Press, 2004. Официальная страница книги и учебных материалов: https://web.stanford.edu/~boyd/cvxbook/.

Англоязычное название standard form может соответствовать равенствам; при чтении сверяйте формулы с соглашением курса.