НАО «Восточно-Казахстанский технический университет имени Д. Серикбаева»

Дисциплина: «Методы оптимизации»

ЛЕКЦИЯ 1
ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Постановка задачи, примеры и графический метод решения

Основа материала. Тема и её состав соответствуют тематическому плану силлабуса. Расширенные пояснения, примеры, иллюстрации и фрагмент Python являются методической разработкой для проведения занятия.

1. Цель лекции и ожидаемые результаты

Цель лекции — сформировать у обучающихся целостное представление о линейном программировании как разделе математической оптимизации и научить переходить от содержательной постановки прикладной задачи к математической модели.

- знать основные понятия линейного программирования и структуру математической модели;
- уметь выделять переменные решения, целевую функцию и систему ограничений;
- понимать геометрический смысл допустимой области и оптимального решения;
- уметь решать задачи с двумя переменными графическим методом и проверять результат по вершинам допустимого множества.

2. Место линейного программирования в теории оптимизации

Оптимизационная задача возникает тогда, когда из множества допустимых решений требуется выбрать наилучшее в смысле заранее заданного критерия. В линейном программировании и критерий, и ограничения являются линейными функциями переменных. Именно это свойство позволяет применять строгие геометрические и алгебраические методы и получать глобальное оптимальное решение при выполнении условий модели.

Ключевая идея. Линейное программирование отвечает не только на вопрос «можно ли выполнить ограничения?», но и на вопрос «какое из допустимых решений лучше всего по выбранному критерию?».

3. Общая математическая постановка

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — переменные решения. Для задачи максимизации линейная модель может быть записана в виде:

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

при линейных ограничениях

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

Здесь c_j — коэффициенты целевой функции, a_{ij} — технологические или ресурсные коэффициенты, b_i — доступные объёмы ресурсов. В задачах минимизации знак «max» заменяется на «min», а отдельные ограничения могут иметь вид равенств или неравенств другого направления.

3.1. Общая форма задачи линейного программирования

В старых материалах курса общая задача ЛП формулируется для n переменных и допускает одновременно ограничения-неравенства, ограничения-равенства и различные условия на знаки переменных. Такая запись важна, поскольку она показывает структуру задачи до приведения к специальной форме.

$$f(x) = \Sigma_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \text{ (или } \min)$$

$$\Sigma_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,\dots,k$$

$$\Sigma_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = k+1,\dots,m$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,\dots,r, \quad r \le n.$$

Здесь a_{ij}, b_i, c_j — заданные постоянные коэффициенты. Величины c_j определяют вклад переменной x_j в критерий качества, a_{ij} — вклад x_j в i-е ограничение, а b_i задаёт доступный ресурс, норму или требуемый уровень.

3.2. Векторно-матричная запись

Обозначим матрицу коэффициентов $A=(a_{ij})\in R^{m\times n}$, вектор переменных $x\in R^n$, вектор правых частей $b\in R^m$ и вектор коэффициентов целевой функции $c\in R^n$. Тогда стандартная задача максимизации записывается компактно:

$$c^T x \to \max,$$

$$Ax \le b, \quad x \ge 0.$$

Скаляр $c^T x = \langle c,x \rangle$ является линейной функцией. Матричная форма особенно важна для симплекс-метода, двойственности и программной реализации, поскольку позволяет отделить структуру алгоритма от конкретного числа переменных и ограничений.

3.3. Общая, стандартная и каноническая формы

В литературе терминология может немного различаться. В данном курсе будем придерживаться соглашения, использованного в старых лекциях:

Форма	**Целевая функция**	**Ограничения**	**Знаки переменных**
Общая	max или min	≤, ≥ и = могут сочетаться	возможны разные условия
Стандартная	$c^T x \to \max$	$Ax \le b$	$x \ge 0$
Каноническая	$c^T x \to \max$	$Ax = b$	$x \ge 0$

Эти формы эквивалентны: одну можно преобразовать в другую без изменения множества содержательно допустимых планов и оптимального значения после соответствующего преобразования переменных.

3.4. Основные эквивалентные преобразования

Преобразование	**Формула**
Минимизация → максимизация	$\min c^T x \Leftrightarrow \max (-c)^T x$
Неравенство ≥ → ≤	$a^T x \ge b \Leftrightarrow -a^T x \le -b$
Неравенство ≤ → равенство	$a^T x \le b \Leftrightarrow a^T x + s = b,\ s \ge 0$
Свободная переменная	$x_j = x_j^+ - x_j^-,\ x_j^+, x_j^- \ge 0$

Переменная s называется добавочной (slack variable) и показывает неиспользованный остаток ресурса. Подробное приведение к канонической форме рассматривается в следующей лекции; здесь важно понимать математическую эквивалентность преобразований.

4. Основные понятия

Понятие	Содержание
Переменные решения	величины, значения которых требуется определить.

Понятие	Содержание
Целевая функция	числовой показатель качества решения: прибыль, затраты, время, расход материала и т. п.
Ограничения	условия, которым обязано удовлетворять решение.
Допустимое решение	набор значений переменных, удовлетворяющий всем ограничениям.
Допустимая область	множество всех допустимых решений.
Оптимальное решение	допустимое решение, на котором целевая функция достигает наибольшего или наименьшего значения.

4.1. Выпуклость области допустимых решений

Область допустимых решений линейной задачи является выпуклым множеством. Это фундаментальное свойство линейного программирования. Если $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ — два допустимых решения и $0 \le \theta \le 1$, то их выпуклая комбинация

$$x = \theta x^{(1)} + (1-\theta)x^{(2)}$$

тоже допустима. Действительно, из $Ax^{(1)} \le b$ и $Ax^{(2)} \le b$ следует

$$Ax = \theta Ax^{(1)} + (1-\theta)Ax^{(2)} \le \theta b + (1-\theta)b = b.$$

Аналогично сохраняются равенства и условия неотрицательности. Геометрически это означает: вместе с любыми двумя допустимыми точками весь соединяющий их отрезок также принадлежит ОДР.

4.2. Почему в графическом методе достаточно проверять вершины

Для ограниченного допустимого многогранника P с вершинами $v^1,\dots,v^s$ любая точка $x \in P$ представима как выпуклая комбинация вершин: $x=\Sigma_i \lambda_i v^i$, $\lambda_i \ge 0$, $\Sigma_i \lambda_i = 1$. Поэтому для линейной функции $f(x)=c^T x$ имеем

$$f(x)=c^T(\Sigma_i \lambda_i v^i)=\Sigma_i \lambda_i f(v^i) \le \max_i f(v^i).$$

Следовательно, если максимум линейной функции на ограниченной ОДР существует, то хотя бы одна вершина является оптимальной. Именно это утверждение лежит в основе графического метода и симплекс-метода.

5. Как строится математическая модель

1. Определить, какие величины являются неизвестными и могут изменяться. Обозначить их переменными $x_1, x_2, \dots$.
2. Сформулировать критерий качества и записать целевую функцию.
3. Перевести каждое ресурсное, технологическое или логическое условие в математическое ограничение.
4. Добавить условия неотрицательности или другие ограничения на область переменных.
5. Проверить размерности коэффициентов и смысл каждого ограничения.

6. Прикладной пример: план выпуска продукции

Предприятие выпускает два вида продукции P_1 и P_2. Пусть x_1 и x_2 — объёмы их выпуска. Прибыль от единицы продукции равна соответственно 3 и 2 условным единицам. Первый ресурс расходуется по одной единице на каждый вид продукции и доступен в количестве 4. Второй ресурс расходуется по 2 единицы на P_1 и по 1 единице на P_2; доступно 5 единиц.

Требуется определить такой план выпуска, который максимизирует прибыль.

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$x_1 + x_2 \le 4$$

$$2x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

7. Графический метод решения

Графический метод применим прежде всего к задачам с двумя переменными. Каждое линейное неравенство задаёт полуплоскость, а пересечение всех полуплоскостей образует допустимую область. Для линейной целевой функции оптимум, если он существует и конечен, достигается по крайней мере в одной вершине допустимого многоугольника.

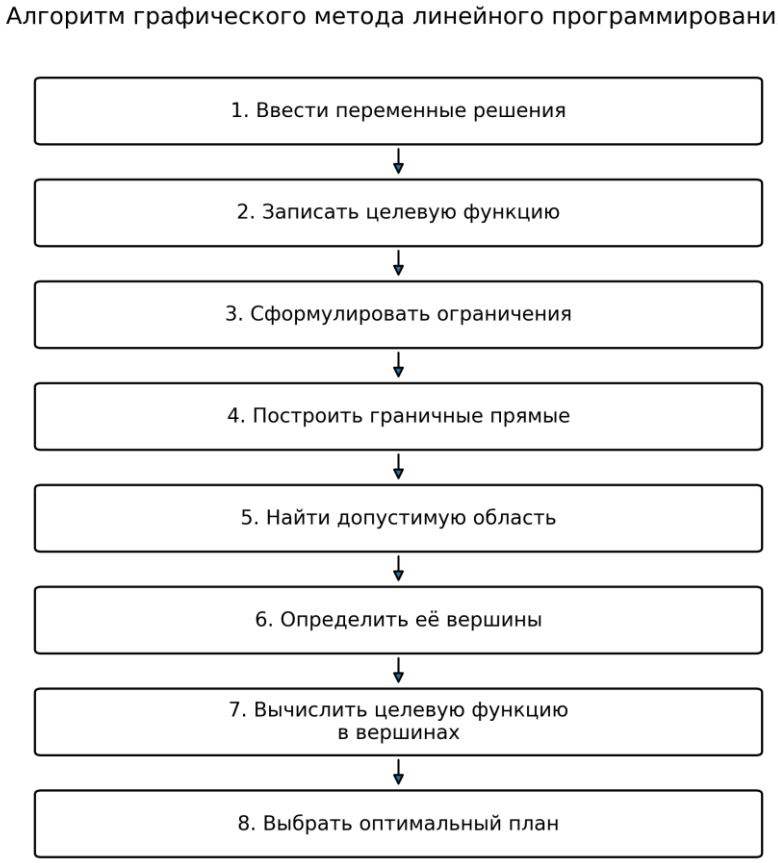


Рисунок 1 — Последовательность решения задачи графическим методом

1. Заменить каждое неравенство равенством и построить соответствующую прямую.
2. Для каждого ограничения определить допустимую полуплоскость.
3. Найти пересечение всех допустимых полуплоскостей.
4. Определить координаты вершин допустимой области.
5. Вычислить значение целевой функции в каждой вершине либо перемещать линию уровня целевой функции в направлении улучшения.
6. Выбрать вершину, в которой достигается максимум или минимум.

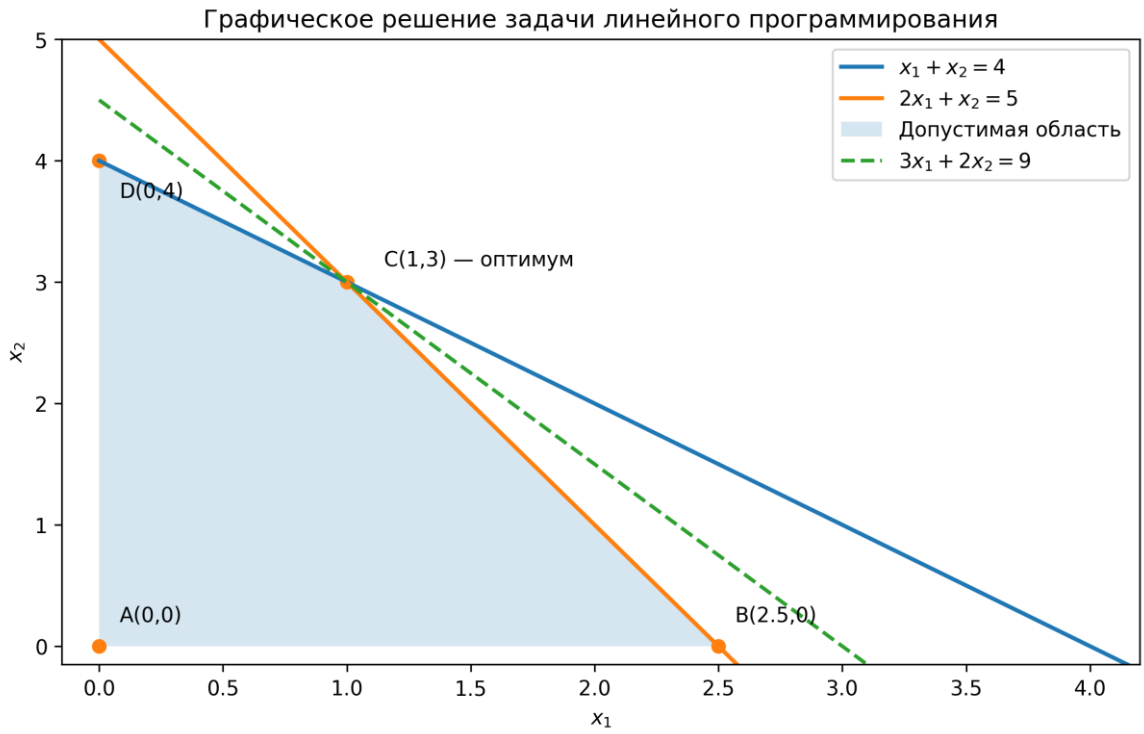


Рисунок 2 — Допустимая область и оптимальная вершина для рассматриваемого примера

8. Подробное решение примера

Граничные прямые имеют вид $x_1 + x_2 = 4$ и $2x_1 + x_2 = 5$. С учётом неотрицательности допустимая область имеет вершины A(0;0), B(2,5;0), C(1;3), D(0;4). Значения целевой функции в этих точках приведены в таблице.

Вершина	x_1	x_2	$F = 3x_1 + 2x_2$
A	0	0	0
B	2,5	0	7,5
C	1	3	9
D	0	4	8

Наибольшее значение F = 9 достигается в точке C(1;3). Следовательно, оптимальный план: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

8.1. Точный пример из старой лекции

Рассмотрим исходный пример из старого курса. Фирма производит два вида продукции A и B. Требуется максимизировать прибыль

$$f(x_1,x_2)=3x_1+2x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$2x_1+x_2\le 8,\quad x_1+2x_2\le 6,\quad x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

Граничные прямые пересекаются в точке, найденной из системы

$$2x_1+x_2=8,\quad x_1+2x_2=6.$$

Умножая второе уравнение на 2 и вычитая первое, получаем $3x_2=4$, откуда $x_2=4/3$. Тогда $x_1=6-2\cdot(4/3)=10/3$.

Таким образом, точка пересечения равна $x^*=(10/3,4/3)$. Кроме неё вершинами ОДР являются (0,0), (0,3) и (4,0).

Вершина	**$f=3x_1+2x_2$**
(0,0)	0
(0,3)	6
(4,0)	12
(10/3,4/3)	38/3 ≈ 12,667

Максимум достигается в точке (10/3,4/3), причём $f_{max}=38/3\approx 12{,}667$. Преимущество этого примера состоит в том, что все вычисления можно выполнить точно в рациональных числах, а затем сравнить с десятичным приближением.

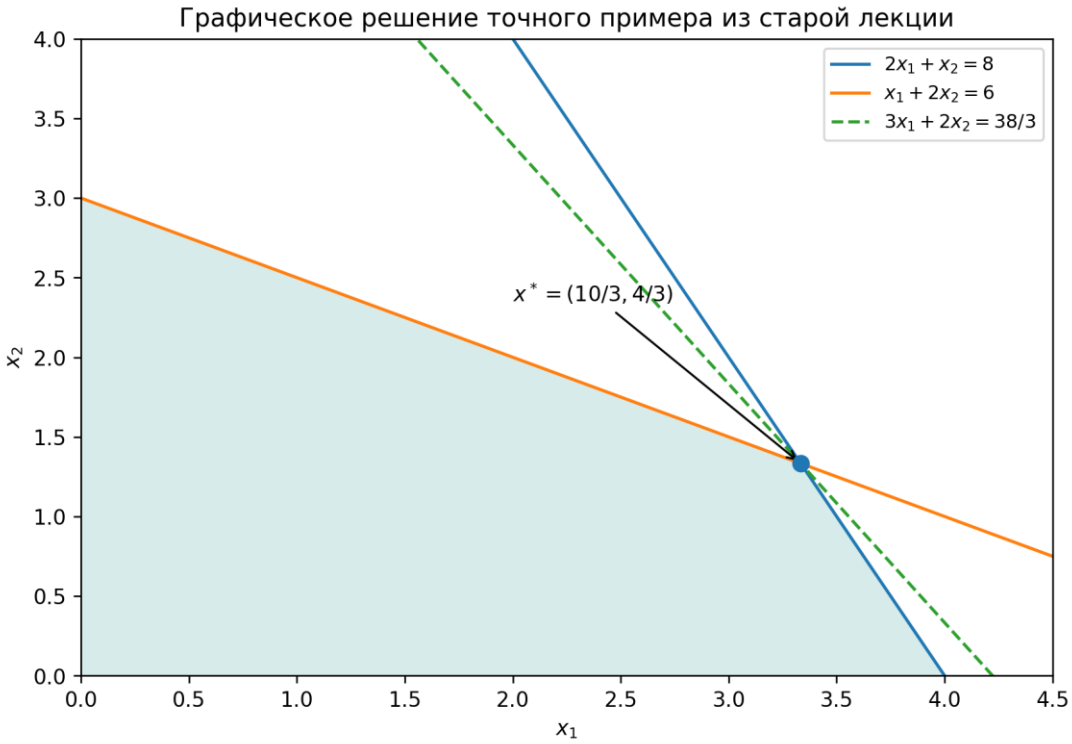


Рисунок 3а — Графическое решение точного примера из старой лекции

9. Геометрическая интерпретация целевой функции

Уравнение $3x_1 + 2x_2 = \text{const}$ задаёт семейство параллельных прямых. При увеличении правой части прямая перемещается в направлении роста целевой функции. Последняя точка соприкосновения с

допустимой областью даёт решение задачи максимизации. На рисунке 2 это вершина C(1;3), через которую проходит линия уровня $3x_1 + 2x_2 = 9$.

10. Возможные случаи при графическом решении

- единственное оптимальное решение — линия уровня касается допустимой области в одной вершине;
- множество оптимальных решений — линия уровня параллельна стороне допустимой области и совпадает с ней при оптимальном значении;
- задача не имеет допустимых решений — ограничения несовместны и их полуплоскости не имеют общего пересечения;
- целевая функция не ограничена — допустимая область позволяет неограниченно улучшать значение критерия.

11. Проверка решения средствами Python

Для задач большей размерности удобно использовать специализированные алгоритмы. Ниже приведён компактный пример с функцией scipy.optimize.linprog. Поскольку linprog решает задачу минимизации, коэффициенты функции максимизации берутся со знаком минус.

```
from scipy.optimize import linprog

# max 3*x1 + 2*x2  <=>  min -3*x1 - 2*x2
c = [-3, -2]
A = [[1, 1],
    [2, 1]]
b = [4, 5]

res = linprog(c, A_ub=A, b_ub=b, bounds=[(0, None), (0, None)])
print(res.x)       # [1. 3.]
print(-res.fun)    # 9.0
```

Важно. Компьютерный результат должен подтверждать математическую модель, а не заменять её постановку. Ошибка в целевой функции или ограничениях приведёт к формально корректному, но содержательно неверному ответу.

11.1. Как интерпретировать активные ограничения

Ограничение называется активным в найденной точке, если оно выполняется как равенство. В оптимальной вершине обычно пересекаются несколько активных ограничений. Для точки C(1;3) в первом примере оба ресурсных ограничения активны: 1+3=4 и 2·1+3=5. Это означает, что оба ресурса используются полностью. Если ограничение выполняется строго, например $a_1x_1+a_2x_2<b$, соответствующий ресурс имеет резерв.

Проверка активности ограничений полезна не только геометрически. Она помогает содержательно объяснить ответ: какие ресурсы являются дефицитными, а какие ограничения в оптимальном плане не сдерживают дальнейшее улучшение целевой функции.

11.2. Второй развернутый пример: задача минимизации

Рассмотрим задачу, в которой необходимо обеспечить минимально требуемые характеристики смеси или производственного плана при минимальных затратах. Пусть x_1 и x_2 — объёмы двух компонентов. Требуется минимизировать стоимость

$$C = 4x_1 + 5x_2 \to \min$$

при ограничениях

$$2x_1 + x_2 \geq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Знаки «≥» означают, что заданные требования должны быть обеспечены не ниже установленного уровня. Допустимая область лежит выше обеих граничных прямых и является неограниченной. Однако задача минимизации всё равно имеет конечное решение, поскольку уменьшение стоимости перемещает линию уровня к началу координат.

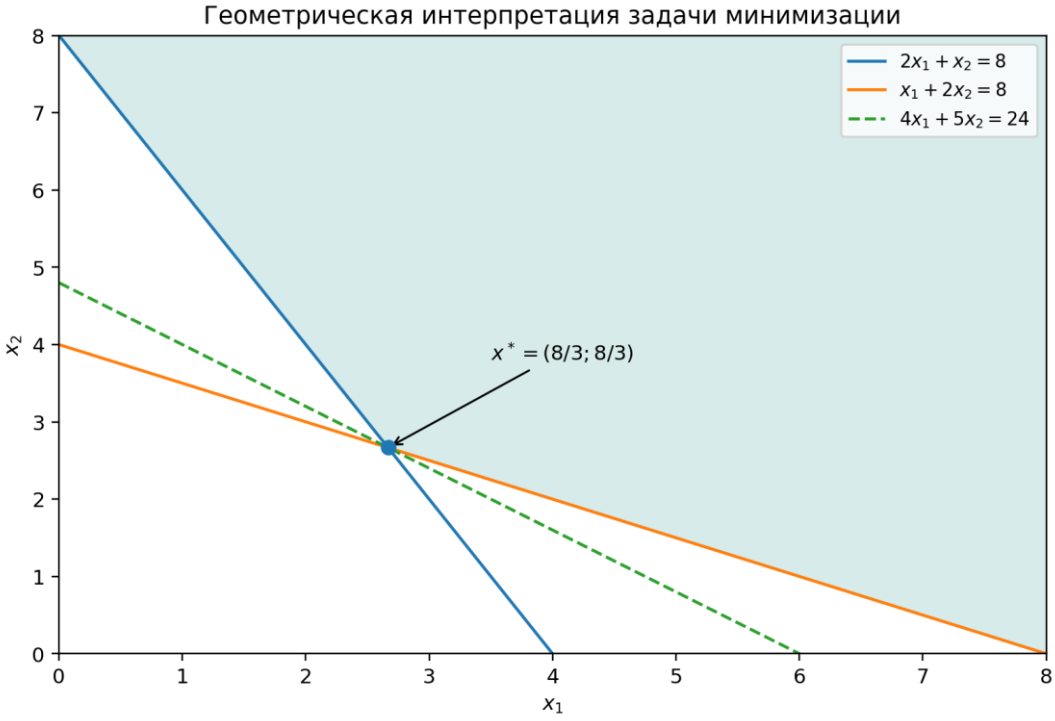


Рисунок 3 — Геометрическое решение задачи минимизации с ограничениями типа «≥»

Найдём характерные угловые точки нижней границы допустимой области. Пересечение прямых $2x_1+x_2=8$ и $x_1+2x_2=8$ даёт $x_1=x_2=8/3$. На осях получаем точки (8;0) и (0;8). Сравним значения целевой функции:

Точка	x_1	x_2	$C=4x_1+5x_2$
A	8	0	32
B	8/3	8/3	24
C	0	8	40

Минимальное значение $C^*=24$ достигается в точке $x_1^*=x_2^*=8/3\approx2{,}667$. Обратите внимание: неограниченность допустимой области сама по себе не означает неограниченность целевой функции. Для задачи минимизации важно, можно ли уходить в допустимой области в направлении неограниченного уменьшения C.

11.3. Универсальная схема решения задачи линейного программирования

1. Содержательно определить управляемые величины и ввести переменные решения.
2. Выбрать критерий оптимальности: максимум прибыли, минимум затрат, времени, расхода и т. п.
3. Для каждого ресурса или требования записать линейное ограничение и проверить знак неравенства.
4. Добавить ограничения на знаки и диапазоны переменных.
5. Проверить размерности и экономический/физический смысл коэффициентов.
6. Для двух переменных построить граничные прямые и определить допустимые полуплоскости.
7. Найти вершины допустимой области, вычислить в них целевую функцию и выбрать оптимальную.
8. Проверить найденную точку подстановкой во все ограничения и интерпретировать активные ограничения.

11.4. Типичные ошибки при постановке и решении

- переменные вводятся без единиц измерения и содержательного смысла;
- знак ограничения выбирается механически: «расход не более запаса» требует ≤, а «обеспечить не менее нормы» требует ≥;
- забываются условия неотрицательности;
- строится граничная прямая, но выбирается неверная полуплоскость; проверять сторону удобно тестовой точкой, например (0;0), если она не лежит на прямой;
- оптимум выбирается визуально без проверки значения целевой функции в вершинах;
- компьютерная программа запускается до того, как корректно сформулирована математическая модель.

11.5. Математическое ядро лекции

Понятие	**Математическая запись / смысл**
Целевая функция	$f(x)=c^Tx \to \max (\min)$
ОДР	$P=\{x: Ax\le b, Aeqx=beq$, условия на знаки$\}$
Выпуклость	$x,y\in P \Rightarrow \theta x+(1-\theta)y\in P,\ 0\le\theta\le 1$
Линия уровня	$c^Tx=\gamma$
Оптимальная вершина	для ограниченного многогранника максимум/минимум линейной функции достигается хотя бы в одной вершине
Активное ограничение	$a_i{}^Tx^*=b_i$

12. Вопросы для самоконтроля

1. Что называется допустимым и оптимальным решением?
2. Какие элементы обязательно присутствуют в задаче линейного программирования?
3. Почему при двух переменных ограничения удобно интерпретировать геометрически?
4. Почему достаточно проверять вершины допустимого многоугольника?
5. Как геометрически распознать случай множества оптимальных решений?
6. Что означает несовместность системы ограничений?
7. Как изменить задачу максимизации для решения функцией linprog?
8. Докажите выпуклость множества $\{x: Ax\le b\}$.
9. Почему значение линейной функции в выпуклой комбинации точек является той же выпуклой комбинацией её значений?
10. Как преобразовать свободную переменную к двум неотрицательным переменным?
11. Что показывает добавочная переменная в ресурсном ограничении?

13. Мини-задания после лекции

1. Составить модель: предприятие выпускает два изделия, используя два ограниченных ресурса; выбрать собственные коэффициенты и объяснить их смысл.
2. Для модели $\max F = 2x_1 + 5x_2$ при ограничениях $x_1 + x_2 \le 6$, $x_1 + 3x_2 \le 9$, $x_1,x_2 \ge 0$ построить допустимую область и найти оптимум.
3. Привести пример реальной ситуации, где критерием является минимум, а не максимум.

14. Итоги лекции

Линейное программирование строится на трёх взаимосвязанных элементах: переменных решения, линейной целевой функции и линейных ограничениях. Для двух переменных задача имеет наглядную геометрическую интерпретацию: ограничения формируют допустимую область, а оптимум линейной функции достигается в одной или нескольких её граничных вершинах. Правильная постановка

математической модели является главным условием корректности последующего вычислительного решения.

Литература по силлабусу

1. Кудашов В. Н., Селина Е. Г. Основы линейного программирования. — СПб.: Университет ИТМО, 2020. — 42 с.
2. Васильев Ф. П. и др. Методы оптимизации: учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры. — М.: Юрайт, 2019. — 375 с.
3. Струченков В. И. Методы оптимизации в прикладных задачах. — М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2012. — 320 с.
4. Черняк А. А., Черняк Ж. А., Метельский Ю. М., Богданович С. А. Методы оптимизации: теория и алгоритмы. — 2-е изд. — М.: Юрайт, 2023. — 357 с.