ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1. Примеры задач линейного программирования

Линейное программирование (ЛП) – это раздел оптимального (математического) программирования, занимающийся разработкой методов отыскания экстремальных значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения.

Задачи линейного программирования (ЗЛП) относятся к задачам на условный экстремум функции. Для решения таких задач разработаны специальные методы ЛП, которые особенно широко применяются в экономике.

Рассмотрим примеры задач ЛП.

1. Задача об использовании ресурсов (задача планирования производства, задача об ассортименте).

Для изготовления нескольких видов продукции $P_1, P_2, \ldots, P_n$ используется сырье $S_1, S_2, \ldots, S_m$, запасы которых составляют $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Количество единиц i–го сырья, идущего на изготовление единицы j–й продукции, составляет a_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Прибыль от реализации единицы продукции j–го вида составляет c_j.

Необходимо найти план производства, при котором прибыль была бы максимальной.

Запишем условия задачи в виде таблицы (табл. 2.1)

Таблица 2.1

Вид сырья	Количество единиц i–го сырья, идущего на изготовление единицы j–й продукции				Запасы сырья
	P_1	P_2	...	P_n	
S_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
...	...	...	...	...	...
S_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
Прибыль	c_1	c_2	...	c_1	

Пусть $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ план производства продукции.

Тогда целевая функция и система ограничений примут вид:

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \qquad (2)$$

Чтобы искомый план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ был реален, наряду с ограничениями на ресурсы (2) нужно наложить условие неотрицательности на объемы x_j выпуска продукции:

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Таким образом, соотношения (1)–(3) составляют ЗЛП.

Пример. Для изготовления двух видов продукции P_1, P_2 используют три вида сырья S_1, S_2, S_3. Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также величина прибыли, получаемая от реализации единицы продукции, приведены в табл. 2.2. Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при ее реализации получить максимальную прибыль.

Таблица 2.2

Вид сырья	Количество единиц сырья, идущих на изготовление единицы продукции		Запас сырья
	P_1	P_2	
S_1	2	5	20
S_2	8	5	40
S_3	5	6	30
Прибыль от ед. продукции, ден.ед.	50	40	

Решение. Обозначим через x_1 количество единиц продукции P_1, а через x_2 – количество единиц продукции P_2. Тогда, учитывая количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, а также запасы сырья, получим систему ограничений

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30. \end{cases}$$

На неизвестные x_1 и x_2 должно быть наложено ограничение неотрицательности:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Конечную цель решаемой задачи – получение максимальной прибыли при реализации продукции – выразим как функцию переменных x_1 и x_2:

$$Z = 50x_1 + 40x_2.$$

Тогда математическую модель задачи можно записать в следующем виде. Найти максимальное значение линейной функции

$$Z = 50x_1 + 40x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 20, \\ 8x_1 + 5x_2 \le 40, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

2. Задача о смесях

К этой группе задач относятся задачи о выборе диеты, составлении кормового рациона в животноводстве, шихт в металлургии, горючих и смазочных смесей в нефтеперерабатывающей промышленности, смесей для получения бетона в строительстве и т. д.

З**адача о диете.** Имеются пищевые продукты, известные под номерами $1,2,\ldots,n$. Они содержат различные питательные вещества, обозначаемые номерами $1,2,\ldots,m$ (углеводы, белки, жиры, витамины, микроэлементы и другие). Единица j–го продукта содержит a_{ij} единиц i–го питательного вещества. Для нормальной жизнедеятельности в заданный промежуток времени нужно потреблять не менее b_i единиц i–го питательного вещества. Обозначим c_j стоимость единицы продукта j–го вида. Требуется выбрать рацион минимальной стоимости, содержащей необходимые количества питательных веществ. План задачи – это количество x_j продуктов каждого вида, обеспечивающие необходимое количество питательных веществ при минимальных затратах на исходные продукты.

Математическая модель задачи: найти

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad i = \overline{1,m},\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}).$$

Пример. При откорме каждое животное ежедневно должно получить не менее 9 ед. питательного вещества S_1, не менее 8 ед. вещества S_2 и не менее 12 ед. вещества S_3. Для составления рациона используют два вида корма. Содержание количества единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и стоимость 1 кг

корма приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ в 1 кг корма	
	корм I	корм II
S_1 S_2 S_3	3 1 1	1 2 6
Стоимость 1 кг корма, ден.ед.	4	6

Необходимо составить дневной рацион нужной питательности, причем затраты на него должны быть минимальными.

Решение. Для составления математической модели обозначим через x_1 и x_2 соответственно количество килограммов корма I и II в дневном рационе. Принимая во внимание значения, приведенные в табл. 2.3, и условие, что дневной рацион удовлетворяет требуемой питательности только в случае, если количество единиц питательных веществ не меньше предусмотренного, получаем систему ограничений

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12. \end{cases}$$

Если корм I не используется в рационе, то $x_1 = 0$; в противном случае $x_1 > 0$. Аналогично имеем $x_2 \geq 0$, т.е. должно выполняться условие неотрицательности переменных.

Цель данной задачи – добиться минимальных затрат на дневной рацион, поэтому общую стоимость рациона можно выразить в виде линейной функции $Z = 4x_1 + 6x_2$ (ден.ед.). Задача является многовариантной, x_1 и x_2 могут принимать бесконечное множество значений. Из этого множества следует выбрать такие x_1 и x_2, при которых функция Z принимает минимальное значение.

Таким образом, имеем математическую модель задачи:

$$\min Z = 4x_1 + 6x_2;$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Пример. Для получения сплава используются три вида сырья, содержащего никель, железо и прочие вещества. В сплав может входить не менее 4% никеля и не более 75% железа и 20% прочих компонентов. Известна стоимость различных видов сырья и процентное содержание в нем соответствующих компонентов сплава (табл. 2.4).

Определить оптимальный состав шихты, для которого стоимость 1 кг сплава будет минимальной.

Таблица 2.4

Компоненты сплава	Содержание компонентов для вида сырья, %		
	S_1	S_2	S_3
Железо	40	70	80
Никель	4	3	6
Прочие	20	10	8
Стоимость, ден. ед. за 1 кг	10	5	7

Решение. Обозначим через x_1, x_2 и x_3 соответственно количество сырья S_1, S_2, S_3, которое предполагается включить в шихту. Из условия задачи сформулируем ограничения по компонентам сплава

$$\begin{cases} 0{,}04x_1 + 0{,}03x_2 + 0{,}06x_3 \geq 0{,}04, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}7x_2 + 0{,}8x_3 \leq 0{,}75, \\ 0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}08x_3 = 0{,}2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

В принятых обозначениях стоимость сырья выразится целевой функцией $\min Z = 10x_1 + 5x_2 + 7x_3$.

Можно рассмотреть также:

– задачу о раскрое материалов с учетом комплектности и без учета комплектности;

– задачу о выборе оптимальных технологий;

– транспортную задачу;

– задачу о размещении заказа и другие.

Впервые ЗЛП была сформулирована Л.В. Канторовичем, который применил математическую модель ЗЛП в экономике (1939 г.). Впоследствии, в 1947 г., американец Джон Данциг разработал алгоритм решения этой задачи. С этого момента ЛП стало основным методом в системном анализе, и в первую очередь в задачах экономики. В 1975 г. Л.В. Канторович получил Нобелевскую премию как основоположник ЛП.