1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

1.1. Системы, методы их исследования и моделирования

Термин **математические методы** понимается как комплекс прикладных и математических научных дисциплин, объединённых для изучения систем и процессов.

Под **системой** будем понимать комплекс взаимосвязанных элементов вместе с отношениями между элементами и между их атрибутами. Исследуемое множество элементов можно рассматривать как систему, если выявлены следующие **четыре признака**:

- *целостность системы*, т. е. принципиальная несводимость свойств системы к сумме свойств составляющих ее элементов;
- *наличие цели и критерия исследования* данного множества элементов;
- *наличие более крупной*, внешней по отношению к данной, *системы*, называемой «средой»;
- *возможность выделения* в данной системе *взаимосвязанных частей* (подсистем).

Основным методом исследования систем является **метод моделирования**, т. е. способ теоретического анализа и практического действия, направленный на разработку и использование моделей. При этом под **моделью** будем понимать образ реального объекта (процесса) в материальной или идеальной форме (т. е. описанный знаковыми средствами на каком-либо языке), отражающий существенные свойства моделируемого объекта (процесса) и замещающий его в ходе исследования и управления. Метод моделирования основывается на принципе аналогии, т. е. возможности изучения реального объекта не непосредственно, а через рассмотрение подобного ему и более доступного объекта, его модели.

1.2. Этапы математического моделирования

Можно выделить следующие шесть этапов математического моделирования.

1. **Постановка проблемы и ее качественный анализ**. На этом этапе требуется сформулировать сущность проблемы, принимаемые предпосылки и допущения. Необходимо выделить важнейшие черты и свойства моделируемого объекта, изучить его структуру и взаимосвязь его элементов, хотя бы предварительно сформулировать гипотезы, объясняющие поведение и развитие объекта.

2. **Построение математической модели**. Это этап формализации проблемы, т.е. выражение ее в виде конкретных математических зависимостей (функций, уравнений, неравенств и др.).

3. **Математический анализ модели**. На этом этапе чисто математическими приемами исследования выявляются общие свойства

модели и ее решений. Важным моментом является доказательство существования решения сформулированной задачи.

4. **Подготовка исходной информации**. В процессе подготовки информации используются методы теории вероятности, теоретической и математической статистики для организации выборочных обследований, оценки достоверности данных и т.д. При системном математическом моделировании результаты функционирования одних моделей служат исходной информацией для других.

5. **Численное решение.** Этот этап включает разработку алгоритмов численного решения задачи, подготовку программ на ЭВМ и непосредственно проведения расчетов; при этом значительные трудности вызываются большой размерностью прикладных задач.

6. Анализ численных результатов и их применение. На этом этапе, прежде всего, решается важнейший вопрос о правильности и полноте результатов моделирования и применимости их как в практической деятельности, так и в целях усовершенствования модели.

Перечисленные этапы математического моделирования находятся в тесной взаимосвязи, могут иметь место возвратные связи этапов. Начав исследование с построения простой модели, можно получить полезные результаты, а затем перейти к созданию более сложной и более совершенной модели, включающей в себя новые условия и более точные математические зависимости.

1.3. Классификация математических методов и моделей

Классификация математических методов сводится к классификации научных дисциплин, входящих в их состав. В составе методов можно выделить следующие разделы:

- *математическая статистика*: выборочный метод, дисперсионный анализ, корреляционный анализ, регрессионный анализ, многомерный статический анализ, факторный анализ, теория индексов и др.;

- *методы принятия оптимальных решений*, в том числе исследование операций. Это наиболее объемный раздел, включающий в себя следующие дисциплины и методы: оптимальное (математическое) программирование, в том числе методы ветвей и границ, сетевые методы планирования и управления, теория и методы управления запасами, теория массового обслуживания, теория игр, теория и методы принятия решений, теория расписаний. В оптимальное (математическое) программирование входят в свою очередь линейное, нелинейное и динамическое программирование, дискретное (целочисленное) программирование, параметрическое программирование, сепарабельное программирование, стохастическое программирование, геометрическое программирование;

- *методы экспериментального изучения явлений.* К ним относят, как правило, математические методы анализа и планирования экспериментов,

методы машинной имитации (имитационное моделирование), деловые игры. Сюда можно отнести также и методы экспертных оценок, разработанные для оценки явлений, не подающихся непосредственному измерению.

Классификации математических моделей систем и процессов. Выделяются следующие основные признаки их классификации или классификационные рубрики.

По общему целевому назначению математические модели делятся на теоретико-аналитические, используемые при изучении общих свойств и закономерностей процессов, и прикладные, применяемые в решении конкретных задач анализа, прогнозирования и управления.

По конкретному предназначению, т.е. по цели создания и применения, выделяют балансовые модели, выражающие требование соответствия наличия ресурсов и их использования; трендовые модели, в которых развитие моделируемой системы отражаются через тренд (длительную тенденцию) ее основных показателей; оптимизационные модели, предназначенные для выбора наилучшего варианта из определенного числа вариантов производства, распределения или потребления; имитационные модели, предназначенные для использования в процессе машинной имитации изучаемых систем или процессов, и др.

По типу информации, используемой в модели, математические модели делятся на аналитические, построенные на априорной информации, и идентифицируемые, построенные на апостериорной информации.

По учету фактора времени модели подразделяются на статистические, в которых все зависимости отнесены к одному моменту времени, и динамические, описывающие экономические системы в развитии.

По учету фактора неопределенности модели распадаются на детерминированные, если в них результаты на выходе однозначно определяются управляющими воздействиями, и стохастические (вероятностные), если при задании на выходе модели определенной совокупности значений на ее выходе могут получаться различные результаты в зависимости от действия случайного фактора.

По характеристике математических объектов, включенных в модель, другими словами, по типу математического аппарата, используемого в модели, выделяются *матричные модели*, *модели линейного* и *нелинейного программирования*, *корреляционно-регрессионные модели*, *модели теории массового обслуживания*, *модели сетевого планирования и управления*, *модели теории игр* и т.д.

По типу подхода к изучаемым системам выделяют *дескриптивные* и *нормативные модели*. При дескриптивном (описательном) подходе получаются модели, предназначенные для описания и объяснения, фактически, наблюдаемых явлений или для прогноза этих явлений. При нормативном подходе интересуются не тем, каким образом устроена и развивается изучаемая система, а как она должна быть устроена и как должна действовать в смысле определенных критериев.